

# Appunti dalle lezioni di Fisica3

Classe 2015/16\*

*Corso di Laurea in Fisica*  
DIFEST, *Università di Parma*



Typeset with  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ , Euler fonts.

\*Gloria Bertolotti, Francesco Bodria, Simone Chicco, Matias Fernando Mamone, Enrico Marsico, Francesco Mazzaschi, Jacopo Papalini, Filippo Rizzinelli, Federico Schianchi, Edoardo Trabucchi, Gianluca Zappavigna

# Indice

Avvertenza	5
Introduzione	7
Le costanti fondamentali	10
Unità derivate	10
1. Bibliografia	11
Capitolo 1. Richiami di Meccanica Classica	13
1. Principi variazionali	13
1.1. La catenaria - I	15
1.2. La conservazione dell'energia	16
1.3. La catenaria - II	16
2. Formulazione indipendente dal tempo del principio variazionale	17
3. Formalismo Hamiltoniano	21
3.1. Il principio di Hamilton	22
4. Invarianti adiabatici	24
4.1. Il caso Kepleriano	25
Capitolo 2. Il modello atomico	27
1. L'esperimento di Rutherford	27
1.1. Calcolo della sezione d'urto	31
1.2. Il problema della stabilità dell'atomo	35
2. Il modello atomico di Bohr	36
2.1. Le regole di quantizzazione	36
2.2. Energie discrete degli stati stazionari	36
2.3. Struttura dell'atomo semi-classico	38
Capitolo 3. Ottica, meccanica e l'idea di De Broglie	41
1. Il principio di Fermat	41
2. Pacchetti d'onde e velocità di gruppo	42
3. Analogie tra ottica geometrica e meccanica e l'idea di De Broglie	44
4. L'equazione di Schroedinger per la particella libera	46
4.1. La soluzione con la trasformata di Fourier	47
4.2. La soluzione numerica nel caso generale	47
5. Il principio di indeterminazione di Heisenberg	49
5.1. Formulazione per un pacchetto gaussiano	49
5.2. Un argomento intuitivo per la disuguaglianza	50
5.3. Effetto Compton	53
6. La relazione relativistica $E(p)$	54
Capitolo 4. Il corpo nero	55
1. Introduzione al problema del corpo nero	55

1.1.	Modello e descrizione fisica	55
1.2.	Le leggi sperimentali: Boltzmann e Wien	57
1.3.	Lo spettro d'emissione e i problemi nella descrizione classica	58
2.	Modi di oscillazione di una cavità	59
2.1.	Deduzione delle equazioni di D'Alembert e leggi della propagazione ondosa	60
2.2.	Risoluzione dell'equazione d'onda in due casi semplici	62
2.2.1.	La corda di violino fissa agli estremi	62
2.3.	La pelle di tamburo a superficie circolare	63
2.3.1.	Approfondimento: aree nodali di un tamburo	65
2.4.	Ricerca dei modi normali per una cavità cubica	65
2.5.	Conteggio dei modi di oscillazione per una cavità sferica	67
2.5.1.	La legge di Weyl	70
3.	La Crisi della Fisica Classica e l'ipotesi di quantizzazione	71
3.1.	Modi Normali Cavità	71
3.2.	Calcolo dell'Energia media per oscillatore armonico	71
3.3.	Formula di Rayleigh-Jeans	72
3.4.	Conseguenze della Legge di Rayleigh-Jeans	72
3.5.	A partire da Wien, la giustificazione teorica di Planck	73
3.6.	L'ipotesi di quantizzazione	74
3.7.	Metodo di Einstein per la deduzione della Formula di Planck	75
3.8.	Conseguenze della Legge di Planck	76
4.	CMBR: Cosmic Microwave Background Radiation	77
Capitolo 5. Elementi di Relatività speciale		79
1.	L'esperimento di Fizeau	79
1.1.	L'esperimento	80
1.2.	Previsione e delusione	80
2.	La luce come onda elettromagnetica	80
3.	L'incompatibilità tra elettromagnetismo e meccanica classica	81
4.	Esperimento di Michelson e Morley	83
4.1.	In the basement	83
4.2.	Previsione teorica	83
5.	Il "Principio di Relatività"	85
5.1.	Le nuove trasformazioni	85
5.2.	Dilatazione dei tempi	87
5.3.	Contraazione delle distanze	87
5.4.	Composizione delle velocità	88
L'osservazione di Fizeau		88
6.	Contemporaneità e causalità	89
6.1.	Causa ed effetto	89
6.2.	Il "Cono di luce"	90
7.	Intervallo spazio-temporale	91
7.1.	Osservazioni sul segno di $\Delta s^2$	91
7.2.	Tempo proprio	92
8.	L'effetto Doppler relativistico	93
8.1.	Caso unidimensionale	93
8.2.	Caso trasversale	94
8.3.	Caso generale	94
9.	"Paradossi" relativistici"	94

9.1. Il paradosso del treno	94
9.2. L'accelerazione in relatività e il paradosso dei gemelli	95
10. Derivazione alternativa delle trasformazioni di Lorentz	97
10.1. Le relazioni di Planck-Einstein e De Broglie come relazione tra quadrivettori	98
Capitolo 6. La formulazione covariante dell'elettrodinamica	99
1. Breve introduzione al calcolo tensoriale	99
1.1. Tensori covarianti e controvarianti	99
1.2. Invarianza	101
1.3. Il tensore $F_{\mu\nu}$	102
1.4. Forma compatta delle equazioni di Maxwell	103
1.5. Trasformazioni di Lorentz del campo elettrico e magnetico	105
1.5.1. Esempio: trasformazione lungo $\vec{x}$	105
2. Modifiche alla dinamica	107
2.1. Particella libera	107
2.1.1. Dinamica classica	107
2.1.2. Dinamica relativistica	108
2.2. Particella carica in campo elettromagnetico	109
2.3. Caso classico	109
2.4. Caso relativistico	110
2.5. Un esempio particolare: campo magnetico uniforme	111
2.6. Caso classico	112
2.7. Caso relativistico	113
3. Conservazione del tetramomento	114
3.1. Esempi di conservazione del tetramomento	114
3.2. Urto fra due particelle nel centro di massa	114
3.3. Decadimento di un pione	115
3.4. L'esempio della navicella spaziale	115
Capitolo 7. Appendici	117
1. Costanti fondamentali	117
2. L'integrale d'azione nel caso Kepleriano	117



## **Avvertenza**

Queste note dalle Lezioni di Fisica<sup>3</sup> tenute dal Prof.E. Onofri nel secondo semestre 2015/2016 sono state raccolte dagli studenti che hanno frequentato il corso e da loro convertite in forma stampabile utilizzando  $\text{\LaTeX}$ . Il titolo in testa a pagine alterne indica gli autori del capitolo.



## Introduzione

Il quadro generale della Fisica all'inizio del secolo XX appare dominato dalla Fisica Newtoniana, dall'Elettromagnetismo di Maxwell e dalla nuova Meccanica Statistica di Gibbs e Boltzmann. Tra questi grandi capitoli della Fisica Classica esiste una contraddizione di fondo: la Meccanica di Newton soddisfa il principio di Galileo - osservatori in moto relativo con velocità costante descrivono i fenomeni meccanici con le stesse leggi, mentre le soluzioni delle equazioni di Maxwell non rispettano questo *principio di relatività Galileiana*. Sarà Albert Einstein a conciliare Meccanica con Elettromagnetismo fondando la Fisica su un principio di relatività basato sulla costanza della velocità della luce, che compare anche come velocità limite insuperabile per tutti i fenomeni che coinvolgono trasporto di energia, massa e anche informazione. Questo è il fondamento della teoria della Relatività Speciale che svilupperemo nella seconda parte del corso.

La Meccanica di Newton tuttavia non è mandata al macero, la sua validità resta incontestata a patto che le velocità in gioco non superino un limite di circa  $10^{-6}c$ , dove  $c \equiv 299\,792\,458$  m/s è per definizione la velocità della luce, ossia  $c$  è assunta come standard assoluto di velocità e non più come grandezza derivata  $L T^{-1}$ . Tutti i moti sulla superficie terrestre, anche i più veloci, presentano velocità molto inferiori, ad es. un jet di linea a 1000 Km/h viaggia appunto a circa  $10^{-6}c$  e si possono ignorare correzioni relativistiche alla sua dinamica (ma un orologio atomico si accorgerebbe di qualche fenomeno tipo "paradosso dei gemelli"). Al contrario un satellite geostazionario<sup>†</sup> utilizzato per il sistema GPS viaggiano a circa 3km/s, quindi a  $10^{-5}c$ , rispetto alla superficie terrestre, ed è essenziale utilizzare la meccanica relativistica per descrivere accuratamente la loro posizione - e addirittura utilizzare la Relatività Generale per il calcolo delle posizioni relative. Ovviamente non esiste una soglia assoluta, ma si tratta sempre di valutare la precisione richiesta e decidere se le correzioni relativistiche sono da tenere in conto. Alla fine la precisione di un millimetro nella posizione di un jet di linea è sicuramente irrilevante, mentre per l'uso pratico del GPS l'applicazione delle formule relativistiche può fare la differenza tra la localizzazione sulla superficie terrestre entro un raggio di un metro ... o di 100 metri, il che è rilevante.

Nell'edificio imponente della Fisica Classica emergono all'inizio del secolo scorso, alcune crepe preoccupanti che segnalano l'arrivo di una vera e propria rivoluzione. Già la Relatività di Einstein (ristretta e Generale) hanno rivoluzionato la Fisica, ma quello che arriva con la Fisica dei Quanti è qualcosa di ancora più dirompente. Le avvisaglie furono

- a) i calori specifici dei solidi previsti dalla meccanica statistica non concordano con l'esperimento a basse temperature - contrariamente alla proprietà secondo cui i calori specifici sono indipendenti dalla temperatura, ci si accorse che si aveva una significativa diminuzione al diminuire della temperatura;
- b) l'effetto fotoelettrico è del tutto incomprensibile in base alla teoria elettromagnetica di Faraday e Maxwell;

---

<sup>†</sup>Il raggio dell'orbita di un satellite artificiale con periodo di 24 ore si calcola nel modo più rapido utilizzando la III legge di Keplero  $T^2/a^3 = \text{costante}$ . Prendendo  $T = 27.33d$ ,  $a = 384\,000$  km per la Luna e  $T' = 24$  h si trova subito  $a' = 42\,367$  km per il raggio dell'orbita e  $v = 3.1$  km/s per la velocità.

- c) la descrizione dell'atomo risulta molto problematica, a dire poco, in termini di fisica classica. L'esistenza degli spettri di emissione discreti nella luce emessa da un gas quale l'idrogeno non ha spiegazione in elettromagnetismo.
- d) l'effetto Compton (scoperto solo negli anni 20) risulta pure incomprensibile alla luce delle equazioni di Maxwell: luce diffusa dagli elettroni di un solido trasparente dovrebbe avere la stessa frequenza di quella incidente, mentre si scopre che esiste una parte della luce diffusa a frequenza inferiore.
- e) Le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo che legano tra loro le osservazioni in riferimenti inerziali. Ci si chiese allora in quale riferimento fossero valide le equazioni e si ipotizzò l'esistenza di una sostanza infinitamente rigida e trasparente le cui vibrazioni costituiscono i campi elettromagnetici. A questa sostanza fu dato il nome di etere, ma le sue proprietà erano palesemente inconsistenti. L'esperimento di Michelson–Morley fu decisivo per capire che l'ipotesi dell'etere era da rigettare in toto.

Riguardo al punto c) c'è da dire che non esiste tutt'oggi una *soluzione esatta* del problema della dinamica di due cariche (elettrone e protone) in interazione attraverso il campo elettromagnetico. Esistono soluzioni approssimate che prevedono che la carica dell'elettrone, accelerata nella sua orbita intorno al protone, deve irraggiare perdendo energia e quindi, secondo alcune stime, l'elettrone dovrebbe avvicinare indefinitamente il protone e fondersi in modo non precisabile sulla base del modello classico di elettrone. Ciò è in contrasto con la stabilità dell'atomo. Tuttavia si potrebbe argomentare che la soluzione è solo approssimata<sup>‡</sup>, e valida per velocità molto minori di  $c$  e quindi l'approssimazione viene a cadere prima o poi e “tutto potrebbe succedere”, in particolare l'instaurarsi di un'orbita stabile di raggio molto piccolo in cui l'elettrone emette e assorbe radiazione elettromagnetica in una configurazione stabile. Tuttavia se questo fosse dimostrato per via di un calcolo esatto, il raggio dell'orbita dovrebbe necessariamente dipendere dalle costanti fondamentali in gioco e cioè  $m$  (massa dell'elettrone),  $e$  (la sua carica) e  $c$ . L'unica grandezza avente le dimensioni fisiche di lunghezza che si può costruire con queste costanti fondamentali è  $r_T = e^2/mc^2$ , detta “raggio di Thompson”. Ciò è facilmente dimostrabile richiedendo che  $m^\alpha e^\beta c^\gamma$  abbia la dimensione di una lunghezza. Questa lunghezza corrisponde a un'energia media nel moto dell'elettrone pari a  $mc^2$  che vale circa 0.5MeV (un *elettron Volt* è l'energia assorbita da un elettrone che cade in una differenza di potenziale di un Volt). Ma l'energia di legame di un elettrone, per es. nell'idrogeno, è circa 10eV quindi 50000 volte più piccola. Si dovrebbe dunque assumere una cospirazione nel calcolo che porti a un valore di energia 50000 volte più piccola dell'unica scala di riferimento. I fisici sono convinti che un fatto del genere sia del tutto innaturale. Il calcolo esatto dovrebbe portare a un risultato esprimibile attraverso la scala naturale con al più un fattore moltiplicativo adimensionale non molto diverso da uno. Era già noto (si veda ad esempio il libro di J. Perrin, “Les Atomes”, che è del 1913, in cui si dà la stima delle dimensioni atomiche) che le dimensioni caratteristiche degli atomi erano intorno a  $10^{-8}\text{cm}$ , unità a cui si dà il nome di Ångstrom. Invece la scala fissata da  $r_T$  risulta circa 20000 volte più piccola. Esiste un'altra scala di lunghezze fissata dall'effetto Compton, ossia la “lunghezza d'onda Compton” dell'elettrone. In questa scala entra  $\hbar$ , la *costante di Planck* :  $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} = 3.861\,592\,680(3)10^{-11}\text{cm}$ . Il rapporto tra  $r_T$  e  $\lambda_C$  è ovviamente un numero puro

$$\lambda_C/r_T = \frac{\hbar}{mc} \frac{mc^2}{e^2} = \frac{\hbar c}{e^2}$$

<sup>‡</sup>Si può consultare a questo riguardo il trattato di Landau-Lifshitz, Fisica Teorica Vol.II, “Teoria dei Campi”, §70: da un calcolo piuttosto complicato si deduce l'intensità di irraggiamento per due cariche che orbitano una intorno all'altra come si pensa avvenga nel modello classico di atomo di idrogeno; gli autori mettono ben in luce che il calcolo è valido solo per velocità piccole rispetto a  $c$ .

che risulta approssimativamente uguale a 137. Il suo reciproco è detta la “costante di struttura fine” e rappresenta una delle grandezze fisiche misurate con la maggiore precisione:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\,999\,074 \quad (44)$$

Se consideriamo una terza scala di lunghezze ottenuta dividendo la lunghezza d’onda Compton dell’elettrone per la costante di struttura fine otteniamo

$$\alpha_B = \frac{\hbar}{mc} \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0.529\,177\,210\,92\,(17)10^{-8}\text{cm} \approx 0.5\text{\AA}$$

e questa rappresenta la scala di lunghezze naturale per le dimensioni atomiche. Si noti che il raggio di Thompson non contiene la costante di Planck, la lunghezza d’onda Compton non contiene la carica dell’elettrone e infine  $\alpha_B$  (il “raggio di Bohr”) non contiene la velocità della luce. Quest’ultima quindi è la scala che sembra più adatta per caratterizzare i fenomeni atomici dove i movimenti di elettroni e nucleo sono lenti rispetto alla velocità della luce.

Il raggio di Bohr entra in modo naturale nel modello che Niels Bohr introdusse nel 1913 basandosi sui risultati di Rutherford. Il modello prevedeva condizioni “ad hoc” per selezionare alcune orbite speciali dell’elettrone intorno al nucleo, senza giustificazioni teoriche, ma semplicemente sulla base del fatto che la condizione di quantizzazione  $\oint \mathbf{p}_r \cdot d\mathbf{r} = n \hbar$  fornisce una formula per i livelli energetici dell’atomo di idrogeno in perfetto accordo con la formula di Balmer

$$E_{nm} = Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad Ry = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Una “nuova” teoria dei quanti, si sviluppa a partire dal 1925 grazie alle ricerche del gruppo di Göttingen (Werner Heisenberg, Max Born e Pascual Jordan) e a quelle di Erwin Schroedinger a Vienna. La teoria che prende il nome successivamente di “Meccanica Ondulatoria” e in seguito “Meccanica Quantistica” è l’opera di molti fisici: oltre a quelli già nominati sono da ricordare lo stesso Bohr, Louis de Broglie, Wolfgang Pauli, Paul Dirac ed Enrico Fermi. La meccanica quantistica, a differenza del modello di Bohr, acquista lo status di una teoria fisica completa in cui la costante di Planck compare in modo naturale e non episodico. Da un punto di vista generale si possono caratterizzare le due teorie che segnano il grande progresso della Fisica nel XX secolo (Relatività e Meccanica Quantistica) con due principi fondamentali della Natura:

- $v < c$  – il limite assoluto di velocità
- $\Delta x \Delta v \geq \hbar/m$  – il principio di indeterminazione

Quest’ultimo, che riscopriremo nel corso dello studio della meccanica quantistica, asserisce che c’è un limite universale alla precisione con cui si può misurare simultaneamente velocità e posizione di qualunque oggetto fisico. Questo limite non ha effetti visibili quando si considerano oggetti macroscopici ma entra in azione a livello di atomi e molecole. Mentre la Relatività ha costretto i fisici a rivedere la propria concezione dello spazio-tempo, il principio di Heisenberg è di primaria importanza per capire la differenza tra una descrizione classica del mondo, valida a livello macroscopico, e quella che si è indotti ad assumere a livello microscopico.

Come considerazione generale, la vera e propria rivoluzione che si realizza agli inizi del secolo XX rappresenta molto più di un progresso nelle conoscenze fisiche; si è infatti operato uno spostamento radicale nella visione del mondo che comporta una differenza profonda nella idea di spazio e tempo nonché una radicale revisione delle leggi della Fisica a livello microscopico (al di sotto della scala del nanometro). Non è da pensare che questo radicale spostamento di “paradigma” riguardi solo il nostro approccio filosofico alla Natura. La liberazione di quantità mai viste prima

di energia che si ha nelle reazioni di fusione nucleare mostra come la equivalenza energia–massa implicata dalla Relatività Speciale riguardi molto da vicino la realtà di tutti<sup>§</sup>.

### Le costanti fondamentali

Nella cartella

dropbox/Lezioni\_MQ\_2015/Documenti/RPP

[.5em] troverete copia delle tabelle pubblicate annualmente sul sito del *Particle Data Group* (<http://pdg.lbl.gov>) che ci potranno essere utili. Si veda anche l'Appendice 1. Naturalmente non si chiede a nessuno di tenere a mente il valore più preciso delle costanti fondamentali, al massimo è utile ricordare l'ordine di grandezza e un'approssimazione adeguata per gli scopi che uno si prefigge. Ad es. vogliamo stimare il raggio di Bohr  $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$ . Ci servono i valori della costante di Planck, della massa e della carica dell'elettrone. Lavorando alla scala atomica è tuttavia più conveniente evitare le unità quali il Coulomb e sfruttare alcuni trucchi: esprimiamo  $a_B$  in termini della costante di struttura fine

$$a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar^2}{m\alpha\hbar c} = \frac{\hbar}{\alpha mc} = \frac{\hbar c}{\alpha mc^2};$$

ora è facile ricordare che  $mc^2$  per l'elettrone vale circa 0.5 MeV (mezzo milione di elettron-Volt)<sup>¶</sup> e per  $\hbar c$  si ha un valore facile da memorizzare  $\hbar c = 197.3269718(44)\text{MeV fm} \approx 200\text{ MeV fm}$  (MeV  $\times$  Fermi). Ne viene immediatamente

$$a_B \approx 400 \times 137 \text{ fm} = 0.55 \cdot 10^5 \text{ fm} = 0.55 \text{ \AA}.$$

Utilizzando i valori più accurati di  $\alpha$ ,  $m$  e di  $\hbar c$  si trova  $a_B = 0.529177 \text{ \AA}$  ma l'unica cosa che ci interessa veramente del raggio di Bohr è il suo ordine di grandezza 0.5\AA e per questo sono sufficienti valori approssimati. Ancora: calcoliamo la lunghezza d'onda Compton

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{0.5 \text{ MeV}} \approx 400 \text{ fm}$$

(il valore più accurato dà 386 fm). Infine calcoliamo la lunghezza d'onda di de Broglie per una particella avente momento lineare  $p = 200\text{MeV}/c$ :

$$\lambda = \hbar/p = \frac{\hbar c}{pc} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{200 \text{ MeV}} = 1.0 \text{ fm}.$$

All'LHC il momento sale alla scala dei 10TeV/c ( $10^7 \text{ MeV}/c$ ) e la lunghezza d'onda è di conseguenza estremamente piccola, dell'ordine di  $O(10^{-5} \text{ fm})$ , vicino allo zm (zeptometro =  $10^{-21} \text{ m} = 10^{-6} \text{ fm}$ )<sup>||</sup>.

**Unità derivate.** Ricordiamo la denominazione di multipli e sottomultipli:

<sup>§</sup>La manifestazione più spettacolare della relazione  $E = mc^2$  si è avuta recentemente (2016) con la rivelazione di un evento cosmico (GW150914) consistente nella fusione di due buchi neri ciascuno della massa di circa 30 masse solari e la trasformazione in energia di 4 intere masse solari in un tempo di mezzo secondo, una potenza emessa istantanea superiore a dieci volte la potenza radiante dell'intero Universo  $\approx 10^{31} \text{ GWatt}$ .

<sup>¶</sup>Il dato più preciso è  $0.510998928(11)\text{MeV}/c^2 = 9.10938291(40)1031\text{kg}$ .

<sup>||</sup>Si è ora in grado di digerire il titolo del libro di G.F.Giudice, "Odissea nello zeptospatio", Springer, 2010.

exa	E	$10^{18}$
peta	P	$10^{15}$
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
...	...	...
milli	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$

Si noti che fm (femtometro) è un po' l'abbreviazione del nome di Enrico Fermi – si direbbe che era destino...

### 1. Bibliografia

La letteratura relativa a Fisica Quantistica e Relatività è vastissima. Alcuni testi adatti per un primo studio sono [?], [?], Resnick–Halliday, Moller, Becchi e D'Elia ....



## Richiami di Meccanica Classica

### 1. Principi variazionali

È noto dalla Meccanica Analitica che le equazioni del moto di un sistema meccanico non dissipativo si possono ricavare dalla sua funzione *Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

dove  $q$  indica l'insieme delle variabili che individuano la configurazione del sistema, tenendo conto dei vincoli,  $\dot{q}$  rappresenta la derivata rispetto al tempo di queste variabili,  $T$  è l'energia cinetica e  $V$  l'energia potenziale del sistema. È anche noto che a partire dalla Lagrangiana le equazioni del moto si ottengono secondo la ricetta di Euler–Lagrange per un sistema a  $N$  gradi di libertà:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

e questo vale *qualunque sia la scelta dei parametri*, siano essi coordinate cartesiane, ove possibile, oppure angoli o altre coordinate curvilinee. La ragione profonda per cui le equazioni nella forma di Euler–Lagrange sono indipendenti dalla scelta delle coordinate è da attribuire al fatto che esse sono equivalenti a un principio di stazionarietà. In questo non c'è molta differenza dalla condizione di minimo o massimo di una semplice funzione di più variabili

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = 0$$

che si esprime in questa forma qualunque sia la natura delle variabili  $x_i$ . Il principio di stazionarietà si esprime come segue: sia definita l'*Azione* per ogni cammino che collega due configurazioni  $q(t_1)$  e  $q(t_2)$  in un lasso di tempo  $T = t_2 - t_1$ :

$$\mathcal{A}(q(t_1), q(t_2), t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

Il valore di  $\mathcal{A}$  dipende dagli infiniti valori assunti dalle funzioni  $q_i(t)$  nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  e dunque non si tratta di una ordinaria funzione di più variabili; per questo tipo di “funzione” si impiega il termine di *funzionale*. Precisiamo ora che cosa si intenda per *variazione* di  $q(t)$  (l'analogo per traiettorie del concetto di differenziale  $dx$ ): consideriamo per una data scelta  $q(t)$  una traiettoria virtuale  $q(t) + \delta q(t)$  dove  $\delta q(t)$  è nulla al di fuori di un intervallo  $(\tau_1, \tau_2)$  interamente contenuto in  $(t_1, t_2)$ , ossia  $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ . Limitandoci a piccole variazioni, e sviluppando la Lagrangiana in serie di Taylor, otteniamo

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \mathcal{A}[q(t) + \delta q(t)] - \mathcal{A}[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha(t) \right) + O(\delta q)^2. \end{aligned}$$

Ora,  $\delta \dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt} \delta q_\alpha$  e perciò un'integrazione per parti ci dà (d'ora in avanti eliminiamo il simbolo di sommatoria in presenza di indici ripetuti  $x_\alpha p^\alpha$  secondo la convenzione attribuita ad Einstein)

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + O(\delta q)^2$$

senza termini al contorno nell'integrazione per parti, in quanto per nostra assunzione  $\delta q(t)$  è identicamente nulla al di fuori di  $(\tau_1, \tau_2)$ . Constatiamo perciò che le soluzioni delle equazioni del moto corrispondono a quella (o *quelle*) traiettorie virtuali intorno a cui l'azione  $S[q]$  si mantiene stazionaria, nel senso che la variazione  $\delta \mathcal{A}$  è infinitesima del secondo ordine rispetto alla variazione  $\delta q$ . Questo fatto esprime il cosiddetto “principio di minima azione” di Euler–Lagrange e rende evidente la natura intrinseca della formulazione lagrangiana delle equazioni del moto. Si noti che l'unica conclusione della derivazione analitica è che la variazione dell'azione per una variazione  $q \rightarrow q + \delta q$  è un infinitesimo del secondo ordine in  $\delta q$  e nulla indica che si tratti di un minimo, di un massimo o di un punto generale di stazionarietà. Per le applicazioni di meccanica classica ciò non è importante. Nel calcolo delle variazioni classico dove i problemi di fisica matematica affrontavano, come nel caso della catenaria che vediamo più avanti, era invece cruciale capire la natura del punto stazionario; anche oggi se vogliamo trovare un punto stazionario di una grandezza, ad esempio il costo di una manovra economica, è cruciale distinguere tra un minimo e un massimo!

PROBLEMA 1. *Esempio di applicazione dell'equazione di E-L. Studiare il moto di un pianeta intorno al Sole.*

SOLUZIONE. *Le equazioni di Newton si scrivono senza difficoltà (trascurando la presenza di altri corpi celesti ad eccezione di Sole e Pianeta):*

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) = - \frac{G_N M_\odot m}{|\mathbf{x}(t)|^3} \mathbf{x}(t)$$

dove  $G_N$  è la costante di Newton e  $M_\odot$  è la massa del Sole. Utilizzare coordinate cartesiane sarebbe poco conveniente in quanto finiremmo a dover risolvere un sistema accoppiato di tre equazioni in tre incognite. È molto più conveniente introdurre coordinate sferiche che meglio si adattano alla simmetria del problema. L'energia cinetica si esprime come

$$T(\dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, r, \vartheta, \varphi) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)$$

mentre l'energia potenziale è funzione solo di  $r$

$$V = - \frac{G_N M_\odot m}{r}$$

Il valore numerico di  $G_N M_\odot$  non ci servirà in questo esempio, tuttavia è utile ricordare come si può ricavare facilmente, almeno come ordine di grandezza: richiedendo che la Terra descriva un'orbita circolare di raggio  $R \approx 149.6 \times 10^6 \text{ Km}$  in un periodo di un anno ( $T = 365.25$  giorni) dobbiamo eguagliare la forza di attrazione Newtoniana  $G_N M_\odot / R^2$  alla forza centrifuga  $v^2 / R$ , dove  $v = 2\pi R / T$  e di conseguenza  $G_N M_\odot = v^2 R$ . Questo ci dà\*  $G_N M_\odot \approx 1.37 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ . Applicando le equazioni di Euler-Lagrange Eq.(1) si ottiene

---

\*Questo è un esempio di unità malamente adattate al problema che obbligano ad utilizzare coefficienti molto grandi (“astronomici”); meglio usare unità adattate al problema, per esempio se si introduce come unità di lunghezza l’“unità astronomica”  $\text{AU} = 149.6 \times 10^6 \text{ Km}$  e come unità di tempo l'anno solare, è ovvio che in questo sistema di unità di misura  $G_N M_\odot = (2\pi)^2$ , un numero molto più facile da ricordare!

$$\ddot{r} = -\frac{G_N M_\odot}{r^2} + r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}) = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = 0$$

Un modo per semplificare il sistema di equazioni, apparentemente formidabile, è quello di tenere conto della conservazione del momento angolare. Dato che la forza di attrazione punta costantemente verso il centro del Sole,  $\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$  è costante del moto e quindi la traiettoria si mantiene costantemente su di un piano ortogonale a  $\mathbf{M}$ . Se fissiamo le coordinate sferiche in modo che la direzione di  $\mathbf{M}$  coincida con  $\vartheta = 0$  la traiettoria avviene per  $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$  e le equazioni si riducono a

$$\ddot{r} = -\frac{G_N M_\odot}{r^2} + r\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

La seconda equazione ci dice che la grandezza  $r^2 \dot{\varphi} = \ell$  è costante nel tempo, niente altro che la seconda legge di Keplero (velocità areolare costante). Sostituendo nella prima equazione si ottiene una singola equazione differenziale

$$\ddot{r} = -\frac{G_N M_\odot}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}$$

che viene chiamata “equazione radiale”. Per risolverla rapidamente, introduciamo il reciproco di  $r$  ( $u \equiv 1/r$ ) e sostituiamo il tempo con l’angolo  $\varphi$  come variabile indipendente. Dalla relazione sulla velocità areolare si trova che

$$\frac{d}{dt} = \ell u^2 \frac{d}{d\varphi}$$

e l’equazione si riduce miracolosamente a

$$\frac{d^2 u(\varphi)}{d\varphi^2} + u(\varphi) = \frac{G_N M_\odot}{\ell^2}$$

che ha come soluzione

$$u = \frac{G_N M_\odot}{\ell^2} + A \cos \varphi$$

o ritornando al raggio

$$\frac{\ell^2}{G_N M_\odot r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$$

che è l’equazione di un’ellisse riferita ad uno dei fuochi, nel caso  $\varepsilon < 1$  oppure quella di un’iperbole equilatera in caso contrario. L’esercizio vuole soltanto evidenziare che l’utilizzo di coordinate adattate alla simmetria del problema, in questo caso simmetria centrale, agevola la soluzione di un problema dinamico, e il formalismo di E-L permette di lavorare nelle coordinate più adatte. ◀

**1.1. La catenaria - I.** Le equazioni di E-L si possono applicare a problemi di minimo-massimo anche in altri contesti. Consideriamo il problema classico di determinare la forma di un cavo flessibile e pesante appeso a due estremità – è il problema della “catenaria”, oggi diremmo il problema del cavo della funivia. Che forma assume il cavo tenendo conto della forza di gravità e dei vari vincoli? Gli estremi sono fissati (le due quote degli estremi e la lunghezza del cavo). Il principio su cui basarsi è quello secondo cui la posizione di equilibrio corrisponde alla minima energia potenziale. Si tratta di formalizzare il problema. Sia  $x$  la posizione lungo l’orizzontale

e  $y(x)$  la posizione verticale del cavo in funzione di  $x$ . Detta  $\rho$  la densità costante del cavo e  $g$  l'accelerazione di gravità, l'energia potenziale è data da

$$V[y, y'] = \int_{x_1}^{x_2} \rho g y(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$V$  è perciò un funzionale di  $y(x)$  e della sua derivata, in modo simile all'azione nel caso dinamico.

C'è però un vincolo da tenere presente e cioè la lunghezza del cavo  $\mathcal{L}[y'] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \ell$ .

Lagrange ha mostrato che si può tenere conto di un vincolo di questo genere cercando il minimo di un funzionale modificato  $V[y, y'] + \lambda \mathcal{L}[y'] = \text{minimo}$ , dove il parametro  $\lambda$  deve essere determinato contestualmente alla soluzione. È poi evidente che possiamo eliminare la costante moltiplicativa  $\rho g$  nel processo di minimizzazione. Attendiamo a discutere la soluzione a dopo che avremo discusso l'integrale primo dell'energia nel caso dinamico.

**1.2. La conservazione dell'energia.** Sulla base di un semplice calcolo a partire dalle equazioni del moto di E-L si trova che dal momento che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo esiste come conseguenza immediata una grandezza che si mantiene costante nel tempo, identificabile con l'energia:

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q})}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left( \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)$$

Questo dimostra che

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = 0.$$

La quantità conservata  $E = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - \mathcal{L}$  si identifica con l'energia del sistema meccanico. Se  $\mathcal{L} = T - V$ , e  $T$  è una forma quadratica omogenea nelle velocità come risulta nei casi più semplici, allora  $E = T + V$ .

**1.3. La catenaria - II.** Il calcolo del paragrafo precedente si può sfruttare anche in altri contesti. Ad esempio, nel caso della catenaria la funzione che entra nel principio variazionale non dipende dalla variabile indipendente  $x$ ; ne segue che la grandezza

$$y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = y' \left( (y - \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\lambda - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C(\text{costante})$$

avendo indicato per semplicità  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Ne segue un'equazione differenziale *del prim'ordine*, anziché del secondo, come si ricaverebbe applicando l'equazione di E-L:

$$1 + y'^2 = \left( \frac{y - \lambda}{C} \right)^2$$

che si risolve ponendo  $\xi \equiv y - \lambda$ :

$$\xi' = \sqrt{\frac{\xi^2}{C^2} - 1};$$

si riconoscerà l'equazione caratteristica delle funzioni iperboliche  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$ . Tenendo conto delle varie costanti si trova

$$y = \lambda + C \cosh((x - x_0)/C)$$

Si nota che sono a disposizione tre costanti arbitrarie  $(x_0, C, \lambda)$  per mezzo delle quali si possono soddisfare i vincoli  $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \mathcal{L} = \ell$ . È interessante che la stessa forma a catenaria,

rovesciata, rappresenta l'arco perfetto, quello cioè del tutto privo di sforzi di taglio (commento su "Gateway Arch", St. Louis).



Se qualcuno è curioso di sapere come si risolve in modo efficiente il problema della catenaria nel *caso discreto* può trovare la soluzione nel file "catenaria.pdf" e il codice matlab `catenaria.m`.

## 2. Formulazione indipendente dal tempo del principio variazionale

Una variante del principio di Euler-Lagrange è particolarmente importante per la comprensione della analogia tra ottica geometrica e meccanica analitica. Si tratta di questo: nel principio di E-L si applicano variazioni al cammino nello spazio delle configurazioni tenendo fissi gli estremi  $q(t_1)$  e  $q(t_2)$ . In una formulazione associata al nome di *Pierre Louis de Maupertuis* (vedi Wikipedia!) la variazione del cammino tiene fisso solo il punto iniziale  $q(t_1) = q_1$  e considera invece fissa l'energia meccanica, cioè le variazioni sono limitate ai cammini che connettono  $q_1$  a  $q_2$  rispettando la conservazione dell'energia. Questo comporta che il tempo di arrivo al punto finale è variabile con il cammino, indichiamolo con  $\tau[q]$ . Se consideriamo un semplice sistema a un grado di libertà questa funzione è data da

$$\tau[q] = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{ds}{\sqrt{E - V(q)}}$$

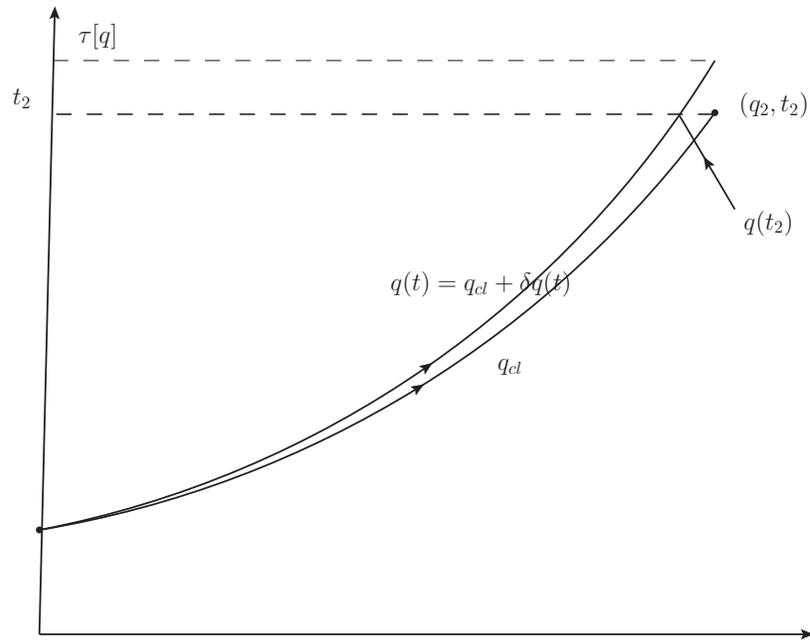
la cui dimostrazione è lasciata come esercizio. Consideriamo la traiettoria che soddisfa le equazioni del moto  $q_{cl}(t)$  e un cammino variato rispetto a questa

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[q] - \mathcal{A}[q_{cl}] &= \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}(q, \dot{q}) - \mathcal{L}(q_{cl}, \dot{q}_{cl})) dt + \int_{t_2}^{\tau[q]} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \\ &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \Big|_{q=q_{cl}} dt + \mathcal{L}(q_{cl}(t_2)) (\tau[q] - t_2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{cl}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \mathcal{L}(q_{cl}(t_2)) (\tau[q] - t_2) \end{aligned}$$

Il primo termine si annulla grazie alle equazioni del moto, il secondo si può riformulare così:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{cl}} \delta q_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{cl}} (q(t_2) - q_{cl}(t_2)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{cl}} (q(t_2) - q(t_2 + \delta t)) \approx -\delta t \dot{q}(t_2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(t_2)$$

FIGURA 1. Cammini a energia fissata.



In definitiva la variazione dell'azione si riduce semplicemente a  $\delta\mathcal{A} = \delta t (L - \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}) \equiv -\delta t E$  ! Si nota allora che questo risultato equivale ad affermare che deve annullarsi la variazione di  $W = \mathcal{A} + E \tau[q]$  che in termini matematici rappresenta la *trasformata di Legendre* dell'azione di

E-L. Riassumiamo: tenendo fissata l'energia  $E$  nella variazione del cammino troviamo che deve annullarsi la variazione

$$\delta \mathcal{A} + E\tau[q] = \delta \int dt (\mathcal{L} + E) = \int dt 2T = 0$$

La relazione vale in qualunque numero di gradi di libertà e se si definisce la lunghezza del cammino come  $s = \int \sqrt{\dot{q}^2} dt$  si ha (a meno di un fattore costante)  $dt = \frac{ds}{\sqrt{T}}$  e infine si trova il principio variazionale

$$\delta \int \sqrt{E - V(q)} ds = 0$$

Questa è la forma che assume il principio variazionale di Euler-Lagrange se si adottano variazioni di cammino che rispettano la conservazione dell'energia. In questa forma (principio di Maupertuis) scompare del tutto la percorrenza oraria sulla traiettoria e la soluzione delle equazioni del moto è espressa semplicemente come un curva nello spazio delle configurazioni che connette i punti  $q_1$  e  $q_2$ . In altre parole: la traiettoria di un sistema meccanico conservativo a energia  $E$  realizza la curva di minima lunghezza tra due punti se per "lunghezza" si adotta una definizione modificata rispetto a quella puramente geometrica

$$L[q] \equiv \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{E - V(q)} ds$$

Si noti che la geometria "dinamica" definita dall'equazione precedente ha senso solo nelle zone dello spazio dove l'energia potenziale è inferiore o uguale ad  $E$ . Come corollario, tutt'altro che banale, le traiettorie di una particella vincolata a scivolare senza attrito su una superficie arbitraria e in assenza di forze ( $V = \text{costante}$ ) sono date dalla *geodetiche* della superficie. Ad esempio sulla superficie di una sfera la particella viaggia su archi di cerchio massimo; su un cono (superficie sviluppabile) la particella descrive traiettorie rettilinee sul cono sviluppato sul piano. Questa "geometrizzazione" della dinamica appare come un'anticipazione delle idee di Einstein che costituiranno la grande teoria della gravitazione (Relatività Generale); per noi tutto questo formalismo sarà utile per comprendere l'analogia profonda tra meccanica classica e ottica geometrica.

**PROBLEMA 2.** *Utilizzare il principio di Maupertuis per calcolare la deflessione di una particella libera di scorrere su un piano liscio senza attrito, soggetta a una forza impulsiva caratterizzata da un'energia potenziale*

$$V(x, y) = \begin{cases} V_1 & \text{per } x < 0 \\ V_2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

**SOLUZIONE.** *Per prima cosa teniamo conto che nelle zone dove  $V = \text{costante}$  la traiettoria deve essere rettilinea. In questo caso così semplice possiamo affermare che la traiettoria deve intersecare l'asse  $y$  in un punto di ordinata da determinarsi  $y = -h$  e per andare da  $A$  ad  $h$  la particella deve descrivere la curva di minima distanza in quanto  $V$  è costante, e ciò vale a destra dell'asse delle ordinate. Ne segue che la traiettoria che soddisfa il principio di Maupertuis è una spezzata il cui unico parametro da determinare è l'ordinata  $-h$ . Calcoliamo l'azione*

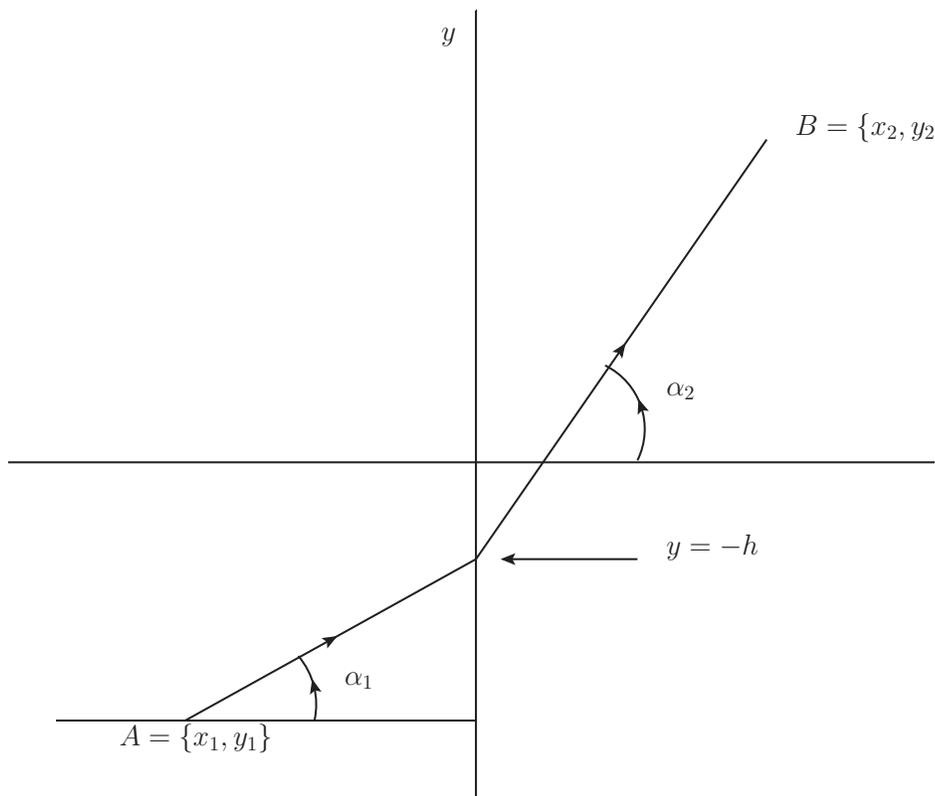
$$W = \int_A^B \sqrt{E - V} ds = \sqrt{E - V_1} \sqrt{(y_1 + h)^2 + x_1^2} + \sqrt{E - V_2} \sqrt{(y_2 + h)^2 + x_2^2}$$

$$\frac{dW}{dh} = 0 = \frac{\sqrt{E - V_1}(y_1 + h)}{\sqrt{(y_1 + h)^2 + x_1^2}} + \frac{\sqrt{\{E - V_2\}(y_2 + h)}}{\sqrt{(y_2 + h)^2 + x_2^2}}$$

Ne segue la condizione su  $h$

$$\frac{\sqrt{E - V_1}(y_1 + h)}{\sqrt{(y_1 + h)^2 + x_1^2}} = \frac{\sqrt{E - V_2}(y_2 + h)}{\sqrt{(y_2 + h)^2 + x_2^2}}$$

(si tenga conto che per le convenzioni adottate come in figura,  $h$  è positiva mentre  $y_1 < -h$ ).



L'equazione è facilmente interpretabile se la riscriviamo così

$$\frac{\sqrt{E - V_1}}{\sqrt{E - V_2}} = \frac{\frac{y_2 + h}{\sqrt{(y_2 + h)^2 + x_2^2}}}{\frac{y_1 + h}{\sqrt{(y_1 + h)^2 + x_1^2}}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

che a tutti farà venire in mente la legge della rifrazione della luce alla superficie che separa due mezzi trasparenti di indice di rifrazione diversi. Dal punto di vista meccanico la relazione trovata dice semplicemente che

$$\sqrt{E - V_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{E - V_2} \sin \alpha_2$$

ossia la componente del momento lineare parallela alla retta che separa le due zone con energia potenziale differente rimane costante all'attraversamento della retta  $x = 0$  e infatti la forza è diretta in direzione  $x$ . Questo esempio ci illustra l'analogia tra la meccanica del punto e l'ottica geometrica. Per esercizio ricavare con il principio di Maupertuis la "legge di riflessione" ossia il fatto che la traiettoria di una massa che rimbalza su una parete forma angoli uguali con la parete prima e dopo l'urto. ◀

PROBLEMA 3. Dimostrare che dal principio di Maupertuis discendono le equazioni del moto di Newton per una particella in tre dimensioni e soggetta al campo di forze con energia potenziale  $V(x)$ .

SOLUZIONE. A energia fissata l'elemento di linea  $ds$  è legato a  $dt$  dalla relazione  $ds = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(x)} dt$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned} ds \delta \sqrt{E - V(x)} &= \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(x)} dt \frac{-\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \delta x_i}{2\sqrt{E - V(x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \delta x_i dt \\ \sqrt{E - V(x)} \delta ds &= \sqrt{E - V(x)} \frac{dx_i}{ds} \delta(dx_i) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dt} \delta x_i dt \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme e integrando per parti l'ultima espressione si trova allora

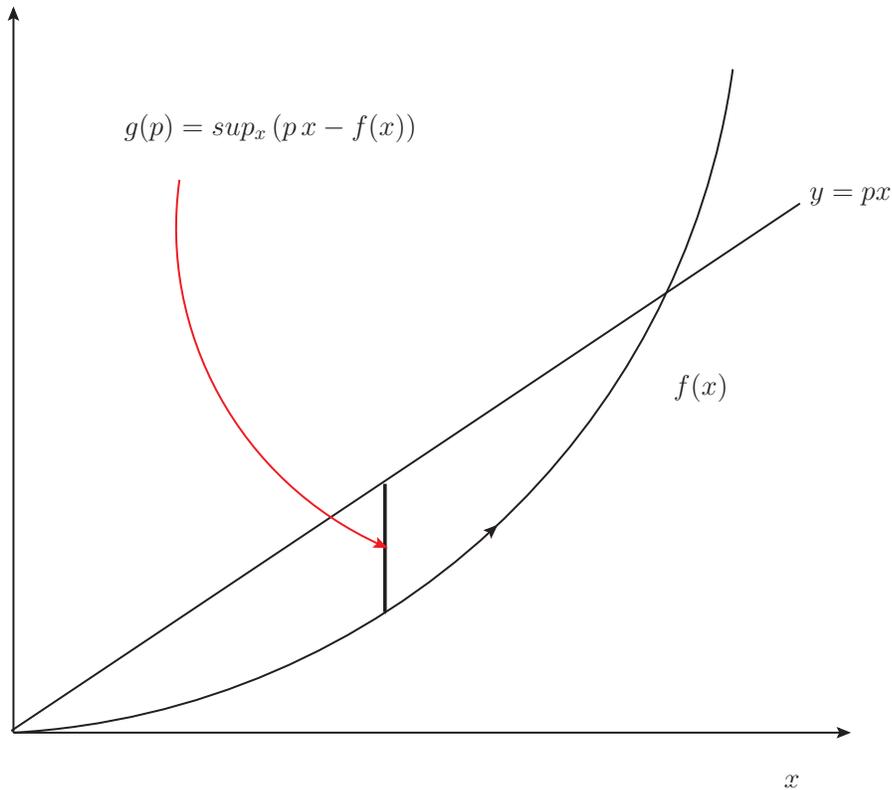
$$\delta \int \sqrt{E - V(x)} ds = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} + m\ddot{x}_i \right) \delta x_i dt = 0$$

da cui seguono le equazioni di Newton, tenendo conto del fatto che le variazioni  $\delta x_i$  sono arbitrarie. ◀

### 3. Formalismo Hamiltoniano

Da un punto di vista molto astratto-matematico si può affermare che la transizione al formalismo di Hamilton da quello di Lagrange consiste nell'applicare una *trasformata di Legendre* sulle variabili  $\dot{q}$ :

$$\mathcal{H}(p, q) = \sup_{\dot{q}} (p \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}))$$



La trasformata di Legendre trova applicazioni in vari contesti. Per un matematico è interessante perchè porta a una disuguaglianza fondamentale: se  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  è la trasformata di  $f(\mathbf{x})$  allora  $f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \geq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .

Dalla definizione segue che  $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  e la funzione  $\mathcal{H}$  è chiamata la *funzione di Hamilton* o semplicemente l'*Hamiltoniana* del sistema meccanico, mentre  $\mathbf{p}$  è detto il *momento coniugato* a  $\mathbf{q}$ .

PROBLEMA 4. *In meccanica relativistica, la particella libera di massa  $m$  è definita da un'azione  $\mathcal{A} = -mc \int ds$  dove  $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$  e quindi la Lagrangiana è data da  $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{\mathbf{x}}/c)^2}$ . Calcolare l'Hamiltoniana.*

SOLUZIONE. Il momento  $\mathbf{p}$  è dato da  $m\dot{\mathbf{x}}/\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{x}}/c)^2}$  e sostituendo nella definizione  $\dot{\mathbf{x}}$  in funzione di  $\mathbf{p}$  si trova rapidamente

$$\mathcal{H} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$$

che riproduce la formula  $E = mc^2$  valida a  $\mathbf{p} = 0$ . ◀

Dalla semplice relazione

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \\ &= d(\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}) = \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} + \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{p}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} \end{aligned}$$

(Si è fatto uso delle equazioni di E-L nell'ultimo passaggio). Ne seguono le equazioni di Hamilton:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

**3.1. Il principio di Hamilton.** Il principio variazionale di E-L si può immediatamente riformulare in termini dell'Hamiltoniana:

$$\delta \int \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = \int (\mathbf{p} d\mathbf{q} - \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) dt = 0$$

e da questo seguono facilmente le equazioni di Hamilton se si ammette di estendere il principio variazionale ad *arbitrarie variazioni del cammino nello spazio  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$*  che rispettino la condizione al contorno  $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0$ . Questa formulazione del principio variazionale porta ad un gruppo di trasformazioni molto più ampio rispetto alle quali vale l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton. Questo gruppo di trasformazioni è noto come il *Gruppo delle Trasformazioni Canoniche*. Si vedano i testi di meccanica analitica quali [?, ?, ?].

Una formulazione possibile delle trasformazioni canoniche è la seguente: siano  $(P, Q)$  nuove variabili legate a  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  dalla trasformazione

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial S(\mathbf{q}, Q)}{\partial Q} \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial S(\mathbf{q}, Q)}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned}$$

Allora le equazioni del moto per  $(P, Q)$  sono ancora nella forma di Hamilton, con Hamiltoniana ottenuta sostituendo  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  in funzione di  $(P, Q)$  in  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Questo fatto si può sfruttare per impostare la soluzione delle equazioni del moto secondo la tecnica nota come "Equazione

di Hamilton–Jacobi”. Si richieda che la trasformazione porti a  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \tilde{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \equiv P$ . Allora ovviamente  $\dot{P} = 0, \dot{Q} = 1$  che si risolve in modo banale. La condizione si scrive

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = P$$

Dato che l’Hamiltoniana ha il significato di energia meccanica (si vede facilmente che da  $\mathcal{L} = T - V$  segue  $\mathcal{H} = T + V$ ) la variabile  $P$  ha il significato di energia. Nel caso  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + V(\mathbf{q})$  l’equazione di H–J si scrive

$$(2) \quad \left(\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{q}}\right)^2 = 2m(E - V(\mathbf{q}))$$

e in generale in tre gradi di libertà (particella nello spazio)

$$|\nabla S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})| = \sqrt{2m(E - V(\mathbf{q}))}.$$

Questa equazione differenziale del primo ordine è formalmente identica alla cosiddetta “equazione dell’iconale” valida in ottica geometrica

$$|\nabla \Sigma(\mathbf{x})| = n(\mathbf{x}, \omega)$$

valida per luce di frequenza  $\omega$ . I raggi luminosi sono ortogonali alle superfici  $\Sigma = \text{costante}$ , così come le traiettorie della particella di momento  $\mathbf{p} = \nabla S$  sono ortogonali alle superfici  $S(\mathbf{q}) = \text{costante}$ . È da questi fatti emerge la profonda analogia tra meccanica e ottica, che noi vedremo direttamente in termini di principio di Fermat più avanti.

**PROBLEMA 5.** *Derivare la forma dell’orbita descritta da una massa  $m$  in un campo di forze centrale  $V(\mathbf{r})$  utilizzando la formulazione di Hamilton–Jacobi.*

**SOLUZIONE.** *Il moto avviene sul piano ortogonale al momento angolare, dunque possiamo utilizzare coordinate polari e scrivere la Lagrangiana come*

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

da cui si costruisce l’Hamiltoniana  $H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2) + V(r)$ . L’equazione è allora data da

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \right\} + V(r) = E.$$

Si può tentare di trovare una soluzione in una forma particolare, e cioè come somma di due termini separatamente funzioni di  $r$  e di  $\varphi$  (si parla infatti di “separazione delle variabili”)

$$S(r, \varphi) = R(r) + \Phi(\varphi)$$

e questa forma della soluzione porta all’equazione

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dR(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 \right\} + V(r) = E.$$

Dato che  $\varphi$  compare solo nel termine  $\Phi'(\varphi)$  l’equazione è consistente solo se  $\Phi'(\varphi)$  risulta costante rispetto a  $\varphi$ , diciamo  $\Phi'(\varphi) = \ell$ , ossia  $\Phi(\varphi) = \ell(\varphi - \varphi_0)$ . Allora si deve avere

$$\frac{1}{2m} \left( R'(r)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + V(r) = E.$$

il che ci dà

$$R(r) = \int dr \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}}$$

Le nuove variabili canoniche sono  $E$  ed  $\ell$ . La variabile coniugata a  $\ell$ , che risulterà essere una costante del moto, si ottiene derivando  $S(r, \varphi, E, \ell)$  rispetto a  $\ell$ . Otteniamo così

$$Q_\ell = \frac{\partial S}{\partial \ell} = \varphi - \ell \int dr r^{-2} / \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}}$$

Nel caso  $V(r) \propto r^{-1}$  conviene introdurre la variabile  $u = \ell/r$  e l'integrale si calcola secondo la formula già incontrata. Come si noterà, il metodo di Hamilton-Jacobi porta in modo sistematico alla formula dell'orbita senza dovere escogitare trucchi di calcolo. ◀

#### 4. Invarianti adiabatici

In meccanica analitica si definiscono “invarianti adiabatici” quelle grandezze funzioni delle variabili canoniche  $\{p, q\}$  che rimangono approssimativamente costanti allorché l'Hamiltoniano varia nel tempo in modo sufficientemente lento (si veda [?] per una introduzione elementare e [?] per un approccio più moderno). Per essere più precisi, ammettiamo che nell'Hamiltoniano compaia un termine che varia nel tempo lentamente rispetto a una scala di tempi caratteristica del sistema. Per fare un esempio, ammettiamo che la lunghezza di un pendolo semplice risulti funzione del tempo attraverso una formula del tipo

$$\ell(t) = \ell_0 + \gamma t$$

e la costante  $\gamma$ , che ha le dimensioni di una frequenza, sia molto piccola rispetto alla frequenza propria di oscillazione  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ , ossia richiediamo che

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} \ll \sqrt{g/\ell}$$

Una grandezza  $\mathcal{I}(q, p)$  è un invariante adiabatico se la derivata logaritmica  $\dot{\mathcal{I}}(q, p)/\mathcal{I}(q, p) = O(\gamma^2)$ . La determinazione di queste grandezza potrebbe essere un problema complesso, se non fosse che Poincaré ha mostrato come esista una caratterizzazione universale che riduce il problema al semplice calcolo di qualche integrale. Infatti risulta che le grandezze già considerate dai matematici nel corso del secolo XIX

$$(3) \quad J_\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint p_\alpha dq_\alpha$$

godono della proprietà di invarianza adiabatica. Nel caso del pendolo si trova

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)} dx$$

e l'integrale si calcola facilmente tenendo conto che grazie alla formula integrale di Gauss

$$\oint p dq = \iint dpdq$$

è sufficiente calcolare l'area racchiusa dalla curva  $H = H(p, q)$ . In questo caso specifico, la curva è un'ellisse di semiassi  $\sqrt{2mE}$  e  $\sqrt{2E/(m\omega^2)}$ , e quindi

$$\iint dpdq = \pi \times \sqrt{2mE} \times \sqrt{2E/(m\omega^2)} = 2\pi E/\omega$$

e infine  $J = E/\omega$ . Se ne può allora concludere che per una variazione lenta della lunghezza del pendolo si avrà che la grandezza  $E/\sqrt{g/\ell(t)}$  si mantiene approssimativamente costante nel tempo. Ma  $E \propto mg\ell\theta_{\max}^2$ ,  $J \propto \ell^{3/2}\theta_{\max}^2$  e quindi si trova in definitiva che  $\theta_{\max} \propto \ell(t)^{-3/4}$ . Questa è una relazione tutt'altro che banale da trovare per altra via ed è anche facilmente verificabile con un calcolo esplicito (vedi `pendolo_Poe.m` nel folder `matlab/pendolo`).

**4.1. Il caso Kepleriano.** Calcoliamo gli invarianti adiabatici per il moto di Keplero in due dimensioni, cui si può ridurre il moto per via della conservazione del momento angolare. L'Hamiltoniano è

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m r^2} - \frac{k}{r}$$

essendo  $k = G_N M_\odot m$ . Dato che  $p_\phi$  è una costante del moto, si ha che  $J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = p_\phi$ . Inoltre si trova per  $J_r$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{2m(E + k/r - p_\phi^2/(2mr^2))}$$

Il calcolo è svolto in appendice e il risultato è

$$J_r + J_\phi = \frac{mk}{\sqrt{-2mE}}$$

Di questo risultato faremo uso successivamente per calcolare lo spettro di energia dell'atomo di idrogeno secondo la teoria di Bohr.



## Il modello atomico

### 1. L'esperimento di Rutherford

Tra i fenomeni non chiari ed inspiegabili attraverso le teorie fisiche note alla fine dell'800, si inseriscono le osservazioni sperimentali e le congetture riguardanti l'atomo e la sua stabilità. Il percorso che portò alla formulazione attuale della struttura dell'atomo non fu immediato, ma bensì caratterizzato da diverse modifiche apportate nel corso di diversi decenni, basandosi sui risultati di esperimenti mirati e sulla stipulazione delle nuove teorie che caratterizzano la fisica moderna (Relatività e Teoria dei quanti per citare le più eminenti).

Quando nel 1908 Ernest Rutherford propose ad Ernest Marsden e Hans Geiger di studiare sperimentalmente il problema della diffusione di alcuni raggi  $\alpha$  portati ad impattare su una sottile lamina d'oro ( $Z = 79, A \sim 197$ ), il modello atomico riconosciuto era quello proposto nel 1904 dal fisico Joseph John Thompson. Egli, dopo la scoperta dell'elettrone risalente al 1897, si dedicò alla formulazione di un modello atomico stabile, basandosi su alcuni principi quali la neutralità e continuità (nella sua struttura) dell'atomo; pertanto l'atomo proposto da Thompson consisteva in una sfera di "fluido elettrico" carico positivamente e di densità costante, attorno alla cui circonferenza massima si disponeva un numero di elettroni tale da neutralizzare la carica del volume centrale. Questo modello tuttavia non riusciva a giustificare la struttura degli spettri di emissione atomica e da esperimenti successivi (tra i quali anche quello di Marsden-Geiger) venne dimostrato essere inesatto. Quello proposto da Rutherford fu quindi un esperimento fondamentale per lo sviluppo della teoria atomica e l'analisi dei risultati lo portò, pochi anni più tardi (1911), a formulare una nuova ipotesi per la struttura dell'atomo che prevedeva la massa del nucleo non diffusa a tutto il volume dell'atomo, bensì concentrata in un piccolo volume al centro dell'atomo stesso.

Andiamo ora ad analizzare nello specifico l'apparato sperimentale (figura (1)) ed i risultati ottenuti. L'esperimento consisteva nel direzionare raggi  $\alpha$  (già noti essere nuclei di elio  $4\text{He}^{++}$ ) emergenti ad elevata velocità da una sorgente radioattiva, contro una lamina sottile di oro, misurando quante di queste particelle veniva deviata di un angolo generico  $\theta$  rispetto alla direzione di partenza.

Le particelle  $\alpha$  al passaggio attraverso la sottile lamina perderanno una piccola quantità di energia, ma soprattutto subiranno una deviazione dalla loro traiettoria originale causata dalle forze elettriche esercitate su di essa dagli atomi della lamina; la quantificazione di questa deviazione contribuirà a formulare un'ipotesi sulla struttura interna dell'atomo.

In particolare la deflessione dipenderà dall'interazione con i nuclei, in quanto gli elettroni sono troppo poco massivi rispetto alle particelle  $\alpha$  per causarne una deflessione significativa. Un atomo modellizzato da Thompson, al passaggio di una particella  $\alpha$ , ne determinerà una piccola deviazione, a causa della sua generale neutralità e della distribuzione della carica positiva in tutto il volume dell'atomo.

Si può dimostrare che la deviazione del raggio  $\alpha$  si aggirerebbe intorno ad un duemillesimo di grado ( $0.005^\circ$ ). Al passaggio attraverso gli atomi del foglio questa deflessione aumenterà, ma a causa della casualità della disposizione degli atomi incontrati, non aumenterà in modo continuo; da un'analisi statistica si può dimostrare che solo circa lo 0.01% dei raggi incidenti verrà deviato

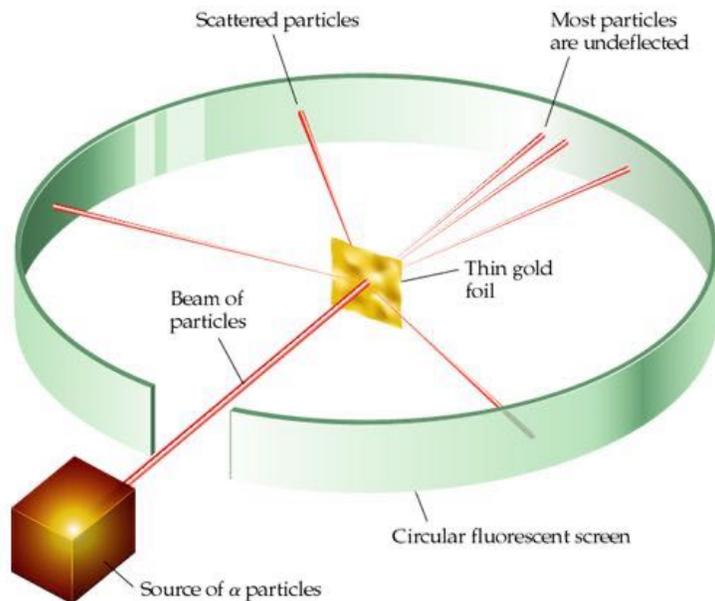
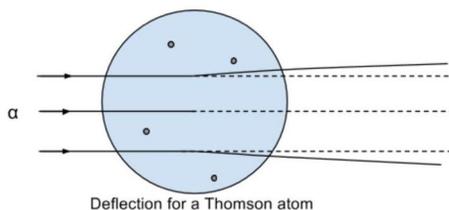


FIGURA 1. Viene schematicamente rappresentato l'apparato sperimentale (sorgente, lamina, rivelatore) di cui fecero uso Marsden-Geiger, per rivelare i raggi deflessi dal passaggio attraverso la lamina.



di un angolo maggiore di  $3^\circ$ .

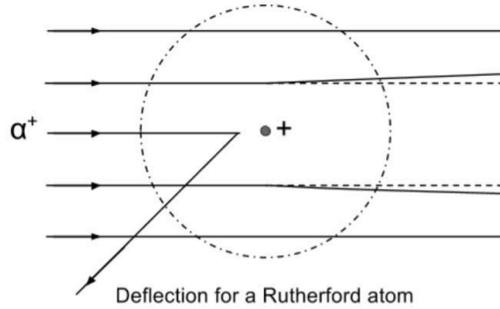
I risultati sperimentali confermano la dominante di raggi deflessi di piccoli angoli, ma ciò che sorprese Rutherford fu osservare che la percentuale di particelle deviate a grandi angoli era in disaccordo con quanto previsto da Thompson. Se le aspettative erano che una particella ogni 103500 potesse essere deviata di un angolo  $\theta \approx 90^\circ$ , sperimentalmente si trovò che una particella ogni 104, non solo poteva essere deviata di  $90^\circ$ , ma capitava persino che tornasse indietro (come fosse stata riflessa). Rutherford commentò con queste parole la sua incredulità nell'aver ottenuto deviazioni così ampie:

*“It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. On consideration I realized that the scattering backwards must be the result of a single collision, and when I made the calculation I saw that it was impossible to get anything of that order of magnitude unless you took a system in which the greater part of the mass of the atom was concentrated in a minute nucleus. It was then that I had the idea of an atom with a minute massive center carrying a charge.”*

*(Ernest Rutherford, discussing 1909 results in later 1936).*

Il modello atomico proposto da Rutherford sull'onda delle osservazioni sperimentali consisteva dunque in un nucleo molto massivo e concentrato in un piccolo volume al centro dell'atomo,

attorno cui ruotavano a grande distanza gli elettroni. Questo modello prevedeva dunque che la maggior parte dell' atomo fosse composta da spazio vuoto ( $\sim 99\%$ ), responsabile della prevalenza di raggi  $\alpha$  deviati di piccoli angoli.



Le particelle  $\alpha$  che invece si avvicinano al nucleo, subiranno forze repulsive Coulombiane estremamente intense e inversamente proporzionali al quadrato della distanza ( $\sim r^{-2}$ ), in grado infatti persino di arrestarne il moto ed invertirlo (riflessione di  $\theta \approx 180^\circ$ ). Possiamo definire quantitativamente l'angolo di diffusione di un raggio  $\alpha$  al passaggio attraverso un atomo, in funzione del parametro d'impatto  $b$ , ovvero la distanza dal nucleo a cui passerebbe la particella se non ci fosse l'interazione Coulombiana\*. Dalla conservazione dell'energia (indicando con  $v_0$  velocità dei raggi  $\alpha$  alla sorgente e  $v$  in un istante scelto del moto):

$$(4) \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

considerando urti sull'asse del nucleo (di carica  $Ze$ ) e dunque a  $b = 0$ , la particella si avvicinerà al nucleo fino ad arrestare il suo moto ( $v = 0$ ) e venire accelerata in verso opposto. La distanza minima raggiunta dal nucleo sarà:

$$r_0 = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2}$$

sostituendo poi la velocità  $v$  con la sua espressione in coordinate polari:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

possiamo riscrivere la conservazione dell'energia (4) come:

$$(5) \quad \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \frac{v_0^2 r_0}{r} = v_0^2$$

siccome l'equazione appena scritta dipende in modo esplicito da  $\dot{r}$ , lo possiamo riscrivere sfruttando la sua definizione (come derivata su  $t$ ).

Avremo:

$$(6) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

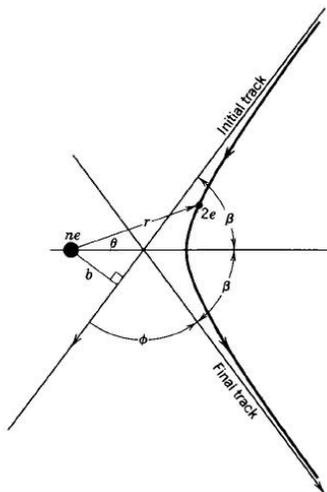
e dalla conservazione del momento angolare:

$$(7) \quad \dot{\theta} = \frac{bv_0}{r^2}$$

possiamo sostituire in (6) il valore di  $\dot{\theta}$ , ottenendo:

$$(8) \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{bv_0}{r^2}$$

\*Il calcolo della formula di Rutherford è effettuato in due modi equivalenti - si veda il paragrafo successivo.

FIGURA 2. Schema di deviazione di  $\alpha$  analizzato

sostituendo (7) e (8) in (5) otteniamo l'equazione differenziale che descrive la traiettoria delle particelle  $\alpha$ :

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{r_0}{b^2} \right) = \frac{1}{b^2}$$

la cui soluzione<sup>†</sup>  $r(\theta)$  può essere scritta come:

$$r(\theta) = \frac{\frac{2b^2}{r_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{r_0}\right)^2 (1 - \cos\theta)}}$$

portando  $r \rightarrow \infty$  (che si verifica per  $\theta \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2b/r_0)^2}}\right)$ ) ricaviamo i due asintoti della traiettoria. Essi realizzano con l'asse del nucleo un angolo  $\beta$  (vedi figura (2))

$$\beta = \pm \cos^{-1}(1/d)$$

pertanto l'angolo totale di deviazione dall'asse lungo cui vengono emesse le particelle  $\alpha$  sarà:

$$\phi = \pi - 2\beta$$

Tutti questi parametri sono stati ricavati con il fine di scrivere (abbinando le formule appena ottenute):

$$\tan\left(\frac{1}{2}\phi\right) = \frac{r_0}{2b} = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0}\right) \frac{Z}{bmv_0^2}$$

ovvero l'angolo di deviazione del raggio  $\alpha$  (<sup>‡</sup>) in funzione del parametro d'impatto  $b$ . Ribaltando l'equazione otteniamo un'espressione di  $b$  che sarà utile più avanti:

$$(9) \quad b = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0}\right) \frac{Z}{\tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)mv_0^2}$$

Di seguito ricaviamo la sezione d'urto differenziale, particelle che vengono deviate, sotto opportune condizioni, in un generico settore ad estremi  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  sotto un angolo solido  $d\omega$ .

<sup>†</sup>si ottiene così l'equazione di un'iperbole

<sup>‡</sup>al passaggio attraverso un singolo atomo della lamina

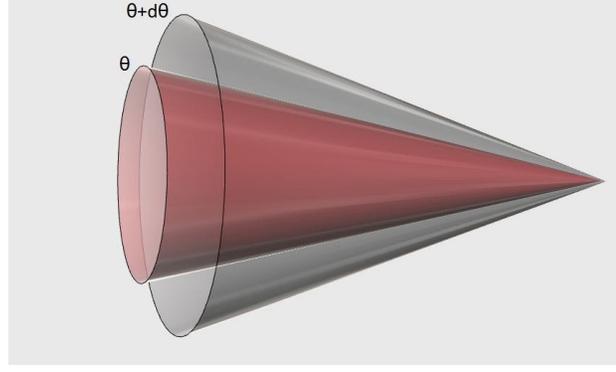


FIGURA 3. Settore di diffusione in cui osserviamo le particelle passanti ad un parametro d'impatto compreso in  $(b, b + db)$

**1.1. Calcolo della sezione d'urto.** Il calcolo della sezione d'urto di diffusione venne fatto da Rutherford utilizzando la meccanica classica. Ecco schematicamente come si definisce la sezione d'urto e come la si calcola secondo la dinamica Newtoniana. Assumendo un flusso unitario di particelle che arrivano sul bersaglio (una particella per unità di area per unità di tempo) il flusso che viene rivelato nell'angolo solido compreso tra un angolo di deflessione  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$  sarà dato da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi b) db}{(2\pi) \sin \vartheta d\vartheta}$$

dove  $b$  è il *parametro di impatto* e  $d\sigma/d\Omega$  è detta *la sezione d'urto differenziale*. Il suo integrale a tutto l'angolo solido  $4\pi$  è la *sezione d'urto totale*; si può pensare come l'area di un ostacolo totalmente assorbente tale che il numero di particelle assorbite coincide con quello delle particelle deviate dal potenziale (per il potenziale Coulombiano la sezione d'urto totale è infinita, perché le particelle vengono deviate a qualunque distanza passino dal nucleo).

Si parte dall'equazione di Hamilton–Jacobi, che caratterizza la trasformazione canonica dalle variabili  $r, \varphi, p_r, p_\varphi$  alle nuove variabili canoniche  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  tali che  $P_2 \equiv H = E$ :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + U(r) = E$$

Si separano le variabili ponendo  $S = R(r) + \Phi(\varphi)$ ; si trova che  $d\Phi/d\varphi = \text{costante} \equiv \ell$  e segue

$$S = \ell \varphi + \int \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}} dr$$

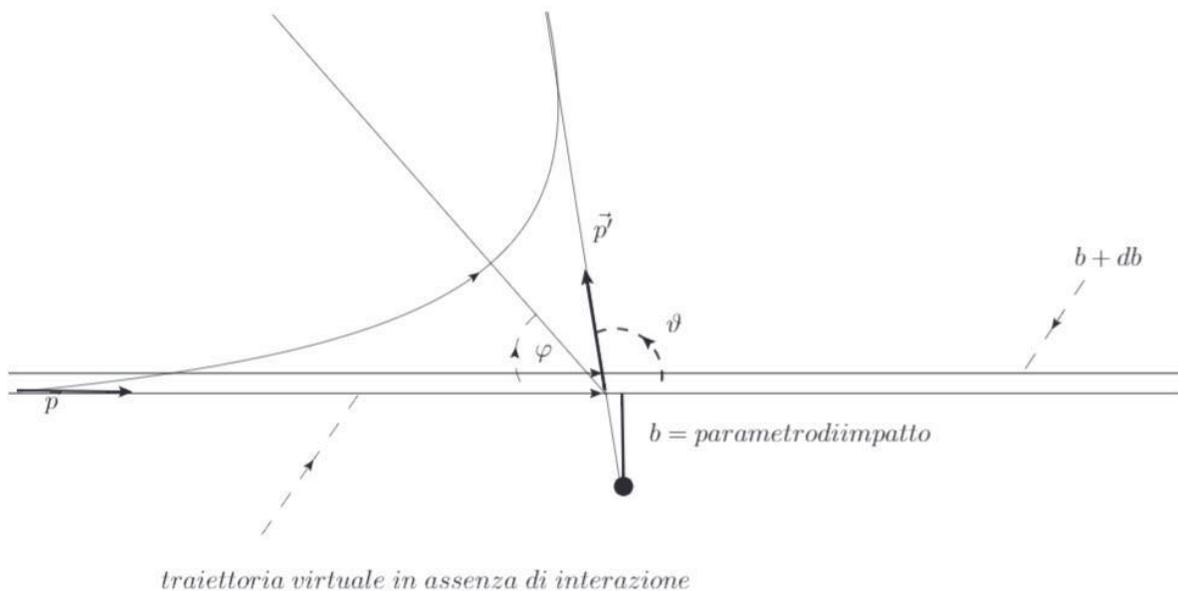
La derivata  $\partial S/\partial \ell$  rappresenta una costante del moto e perciò

$$(10) \quad \frac{\partial S}{\partial \ell} \equiv \varphi_0 = \varphi - \int_{\infty}^r \frac{\ell dr/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}}}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\xi}^0 \frac{\ell d\xi}{\sqrt{2m(E - U(1/\xi)) - \ell^2 \xi^2}}$$

avendo posto  $\xi = 1/r$ . Nel caso di diffusione Coulombiana di una particella di carica  $2e$  su un nucleo di carica  $Z$  si avrà  $U(r) = 2Ze^2/r \equiv k/r$  e quindi

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\xi}^0 \frac{1}{\sqrt{2mE/\ell^2 - 2mk\xi/\ell^2 - \xi^2}} d\xi$$

FIGURA 4. Visione schematica della diffusione  $\alpha$ 

Se poniamo  $\xi = A + B \cos \psi$  possiamo scegliere A e B in modo da semplificare al massimo l'integrale:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{-B \sin \psi}{\sqrt{2mE/\ell^2 - 2mk/\ell^2(A + B \cos \psi) - (A + B \cos \psi)^2}} d\psi$$

Scegliamo  $A = -mk/\ell^2$  in modo da eliminare il termine proporzionale a  $\cos \psi$ , quindi poniamo  $B^2 = 2mE/\ell^2 + (mk/\ell^2)^2$  in modo che l'argomento della radice si riduce a  $B \sin \psi$  e si elimina con il numeratore. Dunque si conclude

$$\varphi - \varphi_0 = -\psi = \cos^{-1} \left( \frac{\xi - A}{B} \right)$$

che ci dà la formula ben nota delle sezioni coniche, ottenibile in tanti altri modi.

$$\frac{\ell^2}{mkr} = -1 + \varepsilon \cos \phi$$

dove il parametro  $\varepsilon$  che rappresenta l'eccentricità (maggiore di uno per le traiettorie iperboliche) è dato dalla formula per B:  $\varepsilon = B\ell^2/mk = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Se ne conclude che l'angolo  $\varphi_0$  che va dalla direzione di incidenza al punto di minima distanza dal nucleo è dato da  $\varphi_0 = \cos^{-1}(1/\varepsilon)$ . Risolvendo rispetto a  $\varepsilon$  otteniamo il legame che ci serve tra parametro di impatto e angolo di diffusione. Infatti l'energia e il momento angolare sono riesprimibili in termini delle grandezze che più direttamente caratterizzano l'orbita, e cioè velocità iniziale (a distanza infinita dal nucleo) e parametro d'impatto  $b$ :

$$(11) \quad E = \frac{1}{2} m v_\infty^2, \quad \ell = m v_\infty b$$

Tenendo conto che l'angolo di deviazione è legato a  $\varphi_0$  dalla relazione  $\vartheta = \pi - 2\varphi_0$ , si ottiene in definitiva

$$\frac{2E\ell^2}{mk^2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta} - 1 = \cot^2 \frac{1}{2}\vartheta = \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta}$$

e applicando l'Eq. (11) si trova

$$b^2 = \left( \frac{k}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta}$$

osserviamo che quanto appena ricavato, per  $k$  fissato può essere analogo con quanto ottenuto in precedenza (eq (9)). Per la sezione d'urto dobbiamo calcolare  $\frac{1}{2} db^2/d(\cos \vartheta)$  e si ottiene così la formula di Rutherford

$$(12) \quad \frac{d\sigma}{d \cos \vartheta} = \left( \frac{k}{2m v_\infty^2} \right)^2 \left( \sin \frac{1}{2} \vartheta \right)^{-4}$$

La forte crescita della sezione d'urto differenziale a piccoli angoli è dovuta al range infinito del campo Coulombiano (un piccolo angolo di deflessione corrisponde a un grande parametro di impatto). La formula fu verificata da Rutherford in una serie di esperimenti e fu alla base del modello di atomo che porta il suo nome.

Tuttavia per l'apparato sperimentale non è possibile osservare la sezione d'urto ricavata per un singolo  $\alpha$  ad un fissato parametro d'impatto, poichè il campione d'oro è composto da diversi strati di atomi e la particella  $\alpha$  subirà una deflessione totale risultante da i contributi dei diversi parametri d'impatto relativi agli atomi che incontra nella sua traiettoria. Per effettuare una previsione statistica, possiamo considerare una corona circolare del target, di raggio  $b$  e spessore  $db$ .

Fissando  $l$  lo spessore della lamina e  $\delta$  la densità di atomi per unità di volume d'oro, le particelle  $\alpha$  incontreranno un numero  $l\delta$  di nuclei. Un  $\alpha$  passante per la corona circolare considerata, avrà un parametro d' impatto  $\sim b$  e subirà una deflessione di un angolo  $\theta$  calcolabile dalla equazione (1). Se supponiamo di ricoprire l'area del target di corone circolari di questo tipo, ovvero di area:

$$\mathcal{A} = 2\pi b db$$

l'area coperta dagli anelli (evitando le sovrapposizioni) sarà:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2\pi b db l \delta$$

Se il numero di particelle  $\alpha$  che impattano sul foglio è  $N$ , quelle ( $dN$ ) che cadranno in uno di questi anelli è quantificabile:

$$dN = N \mathcal{A}_{\text{tot}} = N 2\pi b db l \delta$$

Andando a sostituire con l'espressione del parametro d'impatto ricavata in precedenza (9), otteniamo:

$$dN = \frac{1}{2} \pi m r_0^2 N l \delta \cot \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \csc^2 \left( \frac{\vartheta}{2} \right) d \left( \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Pertanto, tutte le particelle passanti per uno di questi anelli, costruiti attorno ai singoli atomi, condividerà all'incirca il medesimo parametro d'impatto e verranno deviate in un settore circolare di estremi  $\theta, \theta + d\theta$ .

Ponendo il rivelatore su una sfera di raggio  $R$  centrata sulla lamina, le particelle disperse ad un angolo  $(\theta, \theta + d\theta)$  si disporranno dunque in un anello (sulla sfera) di area

$$d\mathcal{A} = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$$

che possiamo riscrivere grazie a proprietà goniometriche come

$$d\mathcal{A} = 4\pi R^2 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta$$

Volendo ottenere il numero di particelle  $\alpha$  deflesse nell' anello  $(\theta, \theta + d\theta)$  sulla sfera di rilevamento, dividiamo il numero di particelle  $dN$  che vi finiscono per l' area calcolata dell' anello

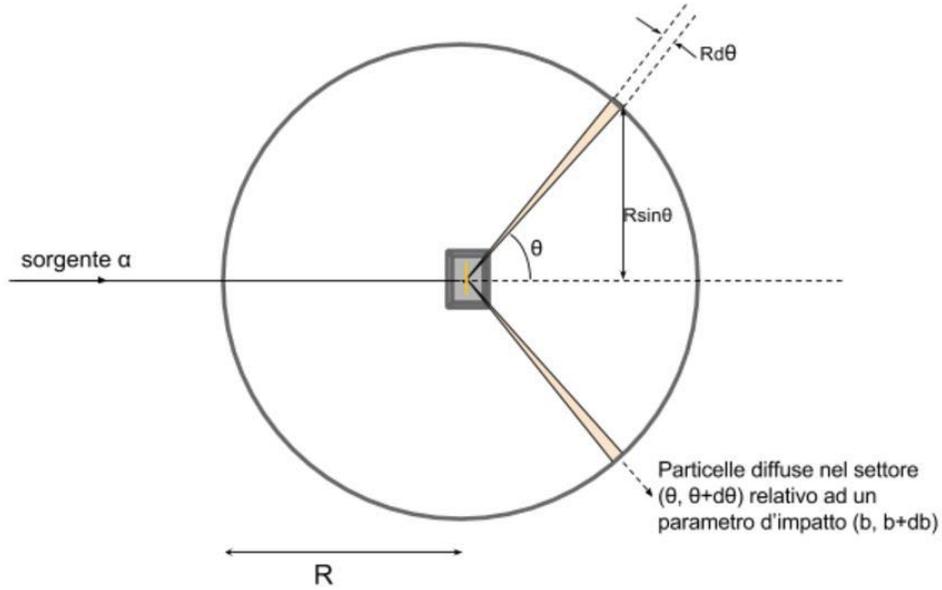


FIGURA 5. Rappresentazione schematica della diffusione da parte della lamina nel settore circolare  $\theta, \theta + d\theta$

(troveremo  $\sigma$  particelle per unità di area):

$$\frac{dN}{\mathcal{A}} = \frac{(\frac{\pi}{2})r_0^2 N l \delta \cot(\frac{\vartheta}{2}) \csc^2(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}{8\pi R^2 \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}$$

Osserviamo che semplicemente dividendo la quantità appena trovata per il numero totale di particelle, otteniamo il valore cercato, ovvero la probabilità per unità di area che una particella  $\alpha$  venga deflessa in modo da finire in quel determinato settore circolare.

$$P = \frac{dN}{\mathcal{A}} \frac{1}{N} = \frac{(\frac{\pi}{2})r_0^2 l \delta \cot(\frac{\vartheta}{2}) \csc^2(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}{8\pi R^2 \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}$$

Infine, per un sensore non continuo lungo la circonferenza di raggio  $R$ , possiamo quantificare la probabilità di osservare una particella  $\alpha$  posizionando il sensore di area  $\mathcal{S}$  ad un qualunque angolo  $\theta$  rispetto alla direzione originaria del raggio  $\alpha$ :

$$P = \frac{dN}{\mathcal{A}} \frac{\mathcal{S}}{N} = \frac{\mathcal{S}(\frac{\pi}{2}) r_0^2 l \delta \cot(\frac{\vartheta}{2}) \csc^2(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}{8\pi R^2 \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}) d(\frac{\vartheta}{2})}$$

la relazione appena ottenuta, si può riscrivere risolvendo i calcoli ed andando a sostituire con le formule ricavate nel calcolo del parametro d'impatto, otteniamo<sup>s</sup>:

$$P = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{l\delta n^2}{4K^2} \right) \left( \frac{\mathcal{S}}{R^2} \right) \frac{1}{\sin^4(\frac{\vartheta}{2})}$$

<sup>s</sup>Osserviamo che in quest'ultima configurazione, la formula può essere divisa in 3 parti, la prima di sole costanti, la seconda riferita alle caratteristiche della lamina e all'energia dei raggi  $\alpha$  incidenti e l'ultima parte riferita alle caratteristiche del sensore (area  $\mathcal{S}$ , distanza  $R$ , posizione angolare  $\vartheta$ ) utilizzato.

I dati ricavati sperimentalmente sono perfettamente in accordo con le previsioni teoriche<sup>¶</sup> appena fatte. Mettendo in corrispondenza il numero di particelle con l'angolo di cui vengono deviate  $N(\theta)$ , otteniamo una curva del tipo rappresentato in figura (6):

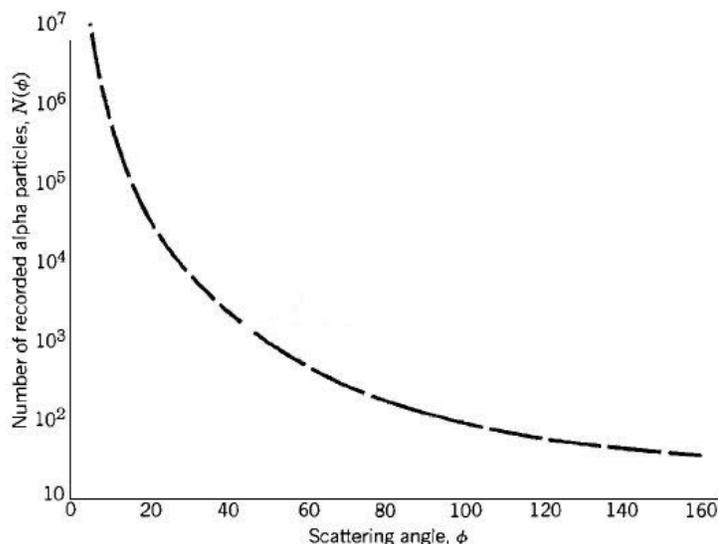


FIGURA 6. Curva teorica che descrive il numero  $N(\vartheta)$  di  $\alpha$  deviate nella superficie del sensore al variare della sua posizione angolare  $\vartheta$

Sperimentalmente non si osserva tuttavia l'asintoto verticale a  $\theta = 0$ ; ciò accadrebbe nel caso ideale in cui un atomo di oro fosse un sistema isolato, e allora particelle a qualunque distanza da esso subirebbero una deviazione (seppur infinitesima a grande distanze), ma siccome il sistema non è isolato, il numero di particelle deviate di un angolo d'intorno a zero raggiungono un valore di saturazione.

**1.2. Il problema della stabilità dell'atomo.** Con la sostituzione del modello atomico di Thompson con quello di Rutherford, furono da ridiscutere le condizioni di stabilità dell'atomo e degli elettroni che venivano posti in numero uguali a metà della massa atomica (e dunque uguali al numero atomico  $Z$ , non ancora definito in quegli anni).

Il problema fondamentale era la posizione degli elettroni. Essi non potevano essere posti nell'immediate vicinanze della massa centrale (nucleo) come nel modello di Thompson, per via della carica opposta del nucleo (+) che avrebbe generato una forza Coulombiana che avrebbe provocato il collasso dell'elettrone sul nucleo.

Un'ipotesi plausibile poteva essere quella ricalcante il modello planetario, ovvero elettroni orbitanti su traiettorie circolari (od ellittiche) a grande distanza da un nucleo di massa molto maggiore, per effetto di una forza centrale reciproca. Tuttavia questa ipotesi apparentemente lecita, presentava un problema di fondo. Per quanto noto già all'epoca dagli studi di elettromagnetismo di Maxwell, una carica accelerata emette energia sotto forma di onde elettromagnetiche; dunque siccome una carica in moto orbitale è costantemente accelerata (accelerazione centripeta), si deduce che essa dovrebbe emettere onde elettromagnetiche in modo continuo.

Ciò tuttavia è una supposizione assurda, per due motivi principali:

<sup>¶</sup>Un'osservazione molto importante da fare è che tutti i calcoli eseguiti si sono basati semplicemente su considerazioni meccaniche classiche; infatti all'epoca la meccanica quantistica non era ancora stata sviluppata come teoria. Si è dimostrato in seguito che i risultati ottenuti rimangono pressoché invariati operando con un approccio quantistico.

- sperimentalmente é già noto (dagli studi di Balmer e Rydberg della fine del secolo 800) che le radiazioni emesse dagli atomi non sono dei continui in tutte le lunghezze d'onda ma sono composti di bande discrete a determinate lunghezze d'onda, definite con accuratezza:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

con  $n, m \in \mathbb{N}$  tali che  $n \geq m + 1$ , che definiscono l'intervallo spettrale di cui studiamo le bande.

- emettendo radiazione elettromagnetica, l'elettrone perderebbe energia; ciò causerebbe una spiralizzazione dell'orbita che porterebbe l'elettrone a collassare sul suo nucleo in un tempo non compatibile con il concetto di stabilità (si stima che un elettrone nel modello planetario collasserebbe sul suo nucleo in un tempo di  $10^{-12}$ s).

Una soluzione a questo paradosso venne fornita pochi anni piú tardi dal fisico Niels Bohr, che nel 1913 elaborò una teoria sul modello atomico in grado di salvaguardare la stabilità e descrivere gli spettri di emissione a bande.

## 2. Il modello atomico di Bohr

**2.1. Le regole di quantizzazione.** Nel 1913, sulla base degli esperimenti svolti in quegli anni e delle teorie da essi derivanti, Niels Bohr formulò un nuovo modello atomico, basato su 3 postulati fondamentali ed in netta contrapposizione con la fisica dell'epoca (che venne poi definita classica in contrapposizione con le nuove teorie che stavano per essere formulate in quegli anni).

- a) Il primo postulato riguarda le *condizioni di stabilità dell'atomo*. Nel modello di Rutherford infatti non si spiegava come un elettrone potesse rimanere in orbita planetaria pur emettendo radiazione elettromagnetica in modo continuo; Bohr ipotizza dunque che (contrariamente a quanto classicamente accettabile) un elettrone possa trovarsi, senza irradiare, in moto in uno o piú stati stazionari.
- b) Il secondo postulato riguarda perciò le *condizioni nelle quali un atomo emette o assorbe radiazione* ed il principio chiave della conservazione dell'energia. Supponendo che un elettrone si trovi in uno degli stati stazionari definiti nel primo principio, esso emetterà od assorbirà energia (sotto forma di fotoni) solo saltando da uno di questi stati a quello di energia superiore od inferiore. Siccome la differenza di energia tra due stati stazionari prossimi é definita come  $h\nu$  (prodotto tra costante di Planck e frequenza), l'energia del fotone emesso (od assorbito) sarà uguale a questa differenza. Quindi un atomo su cui viene fatto incidere un fotone di energia  $h\nu$ , compie una transizione verso uno stato stazionario di energia  $E' = E + h\nu$ .
- c) Infine il terzo postulato riguarda i *limiti della meccanica classica*; Bohr infatti suppone che, analogamente al caso relativistico (in cui per  $v/c \rightarrow 0$  le regole classiche descrivono perfettamente il moto), vi sia un limite energetico entro il quale le due teorie si sovrappongono perfettamente ma oltre ad esso (energie piccole e discrete) la meccanica classica non giustifica i risultati sperimentali.

**2.2. Energie discrete degli stati stazionari.** Cerchiamo ora di ricavare un espressione per le energie discrete dei livelli stazionari postulati da Bohr nel caso semplice dell'atomo di idrogeno. Dalle osservazioni effettuate a fine 800 dai fisici Johann Balmer e Johannes Rydberg su gli spettri di emissione degli atomi (gas atomici a bassa pressione), conosciamo la struttura a bande discrete di tali spettri, le cui frequenze di emissione possono essere ricavate, in termini di lunghezze d'onda, dalla formula:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

moltiplicando per la velocità della luce nel vuoto  $c$ , otteniamo le frequenze relative ad  $n$  ed  $m$ :

$$\frac{c}{\lambda} = \nu_{nm} = cR_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Per ricavare le energie discrete di Bohr basta moltiplicare per la costante di Planck  $h$ :

$$(13) \quad h\nu_{nm} = hcR_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Per quanto scritto nel secondo postulato, la differenza di energia tra due stati sarà un multiplo intero del prodotto  $h\nu$ , pertanto possiamo scrivere:

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m$$

Confrontando questo risultato con la formula ricavata dalla legge di Balmer (13), otteniamo:

$$(14) \quad E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}$$

dove  $n$  è un numero intero che determina gli stati quantici permessi, e varia da  $n = 1$  corrispondente allo stato fondamentale dell' atomo (con l' elettrone alla minima distanza dal nucleo e l' energia maggiormente negativa) ad  $n = \infty$  che corrisponde allo stato stazionario limite, oltre al quale l' elettrone viene separato dal nucleo ( $E = 0$ , valore massimo in quanto non negativo). Per quanto detto in precedenza, un atomo su cui portiamo ad incidere un fotone, assorbirà la sua energia passando a stati stazionari superiori, riemettendola poi sotto forma di altri fotoni, fino a riportarsi allo stato fondamentale (se il fotone incidente è particolarmente energetico, l' atomo compierà più transizioni tra stati discreti, riemettendo più fotoni di energia minore).

Osserviamo che nella definizione delle energie degli stati stazionari, si è utilizzata la costante  $R_H$  di Rydberg, ricavata sperimentalmente. Sarà pertanto utile ricavare un'espressione di questa costante in termini di costanti universali.

Considerando lo schema classico di un elettrone orbitante attorno ad un nucleo, andiamo a scrivere la frequenza con cui esso percorre l' orbita planetaria:

$$\nu = \frac{4\epsilon_0}{e^2} \sqrt{\frac{2}{m}} |E|^{\frac{3}{2}}$$

andando a sostituire con il valore precedentemente ricavato per l' energia degli stati stazionari otteniamo:

$$(15) \quad \nu = \frac{4\epsilon_0}{e^2} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{(hcR_H)^{\frac{3}{2}}}{n^3}$$

Per  $n \gg 1$  siamo nell' intervallo in cui i risultati classici concordano con quelli quantistici, e considerando il passaggio dell' elettrone tra due stati stazionari (da  $n$  ad  $n-1$ ), possiamo sostituire al primo membro la frequenza del fotone emesso durante la transizione:

$$\nu_{em} = cR_H \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = cR_H \left( \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2} \right)$$

che nella condizione sopra citata di  $n \gg 1$ , possiamo semplificare con:

$$(16) \quad \nu_{em} = cR_H \left( \frac{2n}{n^2 n^2} \right) = \frac{2cR_H}{n^3}$$

Dall' uguaglianza tra (15) e (16), otteniamo che la costante di Rydberg può essere scritta in funzione di costanti universali come:

$$R_H = \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$$

dunque l' energia degli stati discreti (14) sarà espressa nella sua forma generale come:

$$E_n = - \left( \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}$$

Un' ulteriore generalizzazione può essere applicata considerando atomi diversi da quello dell' idrogeno ma restando nell' approssimazione di un solo elettrone (quindi atomi ionizzati). In questo caso la carica del nucleo sarà maggiore e corrisponderà a  $Ze$  con  $Z$  numero atomico (che nel caso dell' idrogeno  $Z = 1$ ); pertanto la forza di attrazione tra le due cariche potrà essere generalizzata sostituendo al prodotto  $ee$  il termine  $(Ze)e$ .

Questa sostituzione porterà ad una nuova definizione dell' energia, valida per tutti gli atomi ionizzati ad un solo elettrone:

$$(17) \quad E_n = -Z^2 \left( \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2}$$

Un procedimento alternativo per ricavare tale energia é quello di sfruttare il risultato precedentemente ricavato sugli invarianti adiabatici nel caso kepleriano.

Abbiamo trovato infatti, considerando un' energia potenziale del tipo  $-k/r$ , che:

$$j_r + j_\phi = \frac{mk}{\sqrt{-2mE}}$$

e quindi:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{mk^2}{(j_r + j_\phi)^2}$$

Considerando ora il caso coulombiano, nel quale  $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ , ipotizziamo la quantizzazione degli invarianti adiabatici ( $j_r, j_\phi$  proporzionali a multipli interi della costante di Planck), ovvero supponiamo che valga l'equazione:

$$j = j_r + j_\phi = n\hbar$$

sostituendo si ottiene:

$$E = -\frac{me^4}{(8(\epsilon_0 n\hbar)^2)} \equiv -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} \equiv -\frac{e^2}{2a_B n^2}$$

la seconda espressione più semplice essendo formulata nel sistema c.g.s., e l'ultima mostra il legame con il *raggio di Bohr*  $a_B$ .

**2.3. Struttura dell'atomo semi-classico.** Durante tutta la trattazione dei principi fondamentali del modello di Bohr non abbiamo fatto cenno ad un modello strutturale dell' atomo. Se consideriamo ora le energie in gioco nel "sistema atomo", descritto da un elettrone in moto (in uno stato stazionario) attorno ad un nucleo in un' orbita circolare, ricaviamo un' espressione dell' energia totale come somma di energie cinetiche e potenziali:

$$(18) \quad E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r}$$

con  $U$  energia potenziale coulombiana.

Paragonando l'energia (18) appena ottenuta, con il valore ricavato dal modello di Bohr per gli stati

stazionari (17), é facile ricavare:

$$\begin{aligned}
 E_n &= E \\
 \Rightarrow -Z^2 \left( \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \\
 \Rightarrow Z^2 \left( \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \\
 \Rightarrow Z \left( \frac{e^2 m}{8\epsilon_0 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2r} \\
 \Rightarrow r = r_B = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi Z e^2 m} n^2
 \end{aligned}$$

dove  $r_B$  é il raggio delle orbite relative agli stati stazionari descritti dal modello semi-classico di Bohr. Osserviamo che la quantità  $r_B$  può essere espressa in funzione del raggio dello stato fondamentale moltiplicato per  $n^2$ :

$$r_B = a_B n^2 \quad \text{con} \quad a_B = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi Z e^2 m} = 0.05292 \text{ nm} \quad \text{raggio dello stato fondamentale}$$

Tuttavia, nonostante i valori appena ricavati fossero in accordo con le misure sperimentali sulla dimensione degli atomi, lo stesso Bohr sosteneva che questo modello non fosse accettabile, ma che avesse semplicemente una funzione qualitativa/illustrativa, dalla quale tuttavia poter ricavare risultati quantitativamente corretti. Tale modello fu poi definitivamente abbandonato con l'avvento della meccanica quantistica, di cui esso contribuì a gettare le basi.



## Ottica, meccanica e l'idea di De Broglie

### 1. Il principio di Fermat

Si parte considerando un raggio luminoso che percorre un cammino con indice di rifrazione  $n(\omega, x)$ . Nel caso si abbia a che fare con un cammino  $d$  che percorre  $N$  mezzi differenti avremo:

$$d = \sum_{k=1}^N n_k(\omega) \delta x_k$$

quindi possiamo generalizzare per un mezzo disomogeneo:

$$d = \int_a^b n(\omega, \mathbf{x}) ds$$

Si può quindi enunciare il Principio di Fermat: “Il percorso seguito da un raggio di luce nell’andare da un punto ad un altro è tale da rendere stazionario il cammino ottico rispetto a quello di tutti i percorsi vicini”, e quindi richiamando la teoria variazionale:

$$\delta \int_a^b n(\omega, \mathbf{x}) ds = 0$$

*Esempio:* ricavare la legge della rifrazione dal Principio di Fermat. La traiettoria percorsa dal raggio per andare dal punto A al punto B sarà ragionevolmente una combinazione di rette. Dalla notazione utilizzata nell’immagine possiamo distinguere il cammino compiuto nel mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ :

$$n_1 r_1 = n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

e il secondo nel mezzo con indice  $n_2$ :

$$n_2 r_2 = n_2 \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Applicando il principio di Fermat otteniamo quindi:

$$\frac{\partial [n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}]}{\partial y_1} = 0$$

dalla quale si ricava:

$$n_1 \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = n_2 \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

quindi con semplici considerazioni trigonometriche si giunge alla conclusione:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

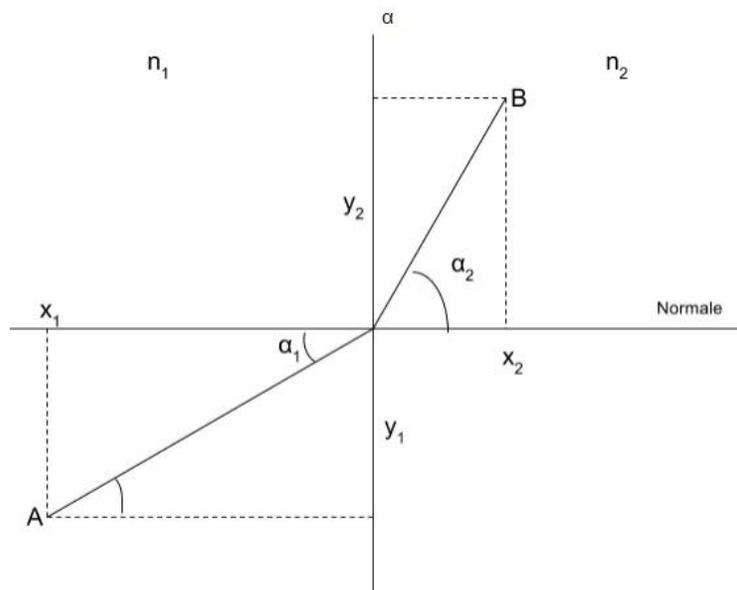


FIGURA 1. Legge di Snell in prossimità della superficie di separazione

## 2. Pacchetti d'onde e velocità di gruppo

Si consideri l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \varphi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t^2}$$

e una soluzione possibile, ovvero le onde piane:

$$(19) \quad \varphi(t, \mathbf{x}) = A e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t}$$

dove  $\mathbf{k}$  viene definito *vettore d'onda* e  $\omega$  *pulsazione* o *frequenza angolare*. Notiamo che l'onda si ripete nel tempo se:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \varphi(\mathbf{x}, t + T) = \varphi(\mathbf{x}, t)$$

oppure:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \longrightarrow \varphi(\mathbf{x} + \lambda, t) = \varphi(\mathbf{x}, t)$$

dove  $T$  e  $\lambda$  vengono chiamati rispettivamente periodo e lunghezza d'onda.  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  sono legati tra loro mediante la velocità di fase  $c$ ; infatti sostituendo (19) nell'equazione d'onda otteniamo:

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$$

Consideriamo ora un insieme finito o infinito di onde sinusoidali che interferiscono tra loro che chiamiamo pacchetto d'onda. La forma piú generale per descrivere lo spostamento di un pacchetto d'onda è quindi:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = A \int d^3k \, a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$$

dove  $a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$  è l'ampiezza che possiamo immaginare centrata in un intorno  $k_0$  e descrivibile matematicamente attraverso una gaussiana:

$$a(k, k_0) = \int \exp\left\{-\frac{k - k_0}{2\sigma^2}\right\}$$

Per gaussiane con  $\sigma$  molto piccole possiamo pensare studiare  $\varphi(x, t)$  in serie di Taylor attorno a  $k_0$ :

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= A \int d^3k a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \\ &= \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i(\omega(\mathbf{k}_0)t + \nabla\omega(\mathbf{k}_0) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)t \dots)) \exp\left(-\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{2\sigma^2}\right) \\ &= A \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}_0)t) \int d^3k \exp\left(-\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{2\sigma^2}\right) + i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)(\mathbf{x} - \nabla\omega(\mathbf{k}_0)t) + \dots \\ &= A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}_0)t} \phi(\mathbf{x} - \nabla\omega(\mathbf{k}_0)t)\end{aligned}$$

Otteniamo quindi che c'è una fase comune a tutte le onde che è quella con vettore d'onda  $\mathbf{k}_0$  che però viene modulata da  $\phi(\mathbf{x} - \nabla(\omega(\mathbf{k}_0)t))$ . È facile capire che in questo caso la velocità di fase non basta per descrivere la propagazione ondosa ma conviene introdurre un altro parametro, ovvero la velocità della modulante, o velocità di gruppo:  $v_g = \nabla\omega(k)$  che è quindi la velocità con cui il pacchetto si propaga nello spazio, in generale diversa dalla velocità di fase.

*Esempio:* ricavare la velocità di gruppo di due onde sinusoidali che si propagano lungo l'asse x e

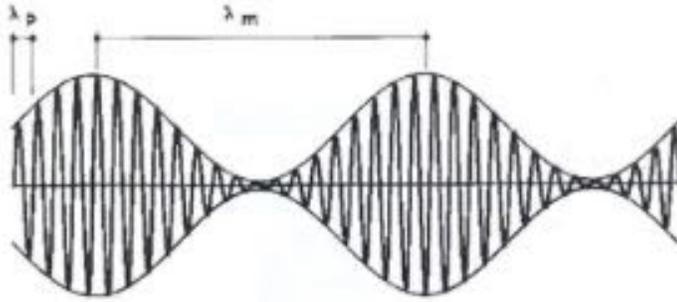


FIGURA 2. pacchetto d'onda e relativa modulante

descritte dalle seguenti leggi orarie:

$$A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t), A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Combiniamo le due equazioni utilizzando le formule di prostaferesi e otteniamo:

$$A_3(x, t) = A(x, t) \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{con } A(x, t) = 2A_0 \cos\left(\frac{[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]}{2}\right).$$

dove abbiamo utilizzato la convenzione:  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  e  $k = k_1 + k_2/2$ .

L'ampiezza  $A(x, t)$  è la modulante dell'onda. Chiamando  $X$  la fase della modulante imponiamo:

$$X = \text{costante} \rightarrow dX/dt = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

dove  $v_g$  è quindi la velocità di gruppo della modulante. È facile notare come per differenze di  $\omega$  e  $k$  infinitesime ci si riconduca alla relazione precedentemente ricavata:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

### 3. Analogie tra ottica geometrica e meccanica e l'idea di De Broglie

Innanzitutto riscriviamo i principi variazionali che abbiamo preso in esame fino a questo punto:

- Principio di Fermat:

$$\delta \int_a^b n(w, \mathbf{x}) dx = 0$$

- Principio di Maupertuis

$$\delta \int_a^b \sqrt{E - V(\mathbf{x})} dx = 0$$

L'idea di de Broglie suggeritagli dall'evidente analogia formale tra i due principi fu di associare ad ogni particella una lunghezza d'onda nel seguente modo:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

in questo modo si può ipotizzare che se l'ottica geometrica è approssimazione di quella ondulatoria è possibile che esista una meccanica ondulatoria che si riconduca alla classica per  $\lambda \rightarrow 0$ . Supponiamo (prima di dimostrarla) la veridicità di quanto appena affermato e calcoliamo la lunghezza d'onda associata ad una pallone da calcio di massa circa 0.5Kg che si muove ad una velocità di modulo 20m/s:

$$\lambda = \frac{h}{m|v|} \simeq 6.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

la quantità non è ovviamente misurabile; mentre per un elettrone libero che si muove ad una velocità di  $10^6$  m/s otteniamo:

$$\lambda = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

grandezza alla portata degli apparati sperimentali.

L'ipotesi che De Broglie ha esposto nella sua tesi di dottorato nel 1924 è stata dimostrata da numerose evidenze sperimentali, tra cui ad esempio l'esperimento della doppia fenditura condotto proiettando su uno schermo un fascio di elettroni (Davisson-Germer nel 1927, Jonsson nel 1961, Merli, Missiroli e Pozzi nel 1974).

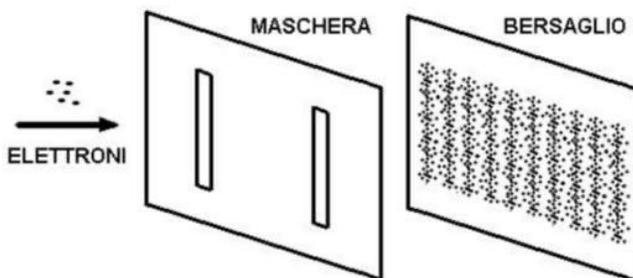


FIGURA 3. Interferenza da doppia fenditura

In figura (3) si vede appunto come gli elettroni passanti dalle due fenditure riproducano la figura di interferenza tipica delle onde elettromagnetiche. Si tratta ora di descrivere il fenomeno da un punto di vista teorico, e per farlo utilizziamo lo stesso procedimento seguito da Enrico Fermi

nelle sue lezioni di Meccanica Quantistica a Chicago nel 1954.

Partendo dall'analogia tra principio di Fermat e di Maupertuis si afferma che le traiettorie seguite dalla particella e dal raggio luminoso sono le stesse se esiste una correlazione tra  $E$  ed  $\omega$  in modo tale che:

$$\frac{1}{v_f} = f(\omega) \sqrt{E - V(\mathbf{x})}$$

dove  $v_f$  è la velocità di fase (proporzionale a  $1/n(\mathbf{x}, \omega)$ ) e  $f(\omega)$  un generico fattore di proporzionalità da determinare. L'idea di base è che vogliamo determinare le condizioni affinché un pacchetto d'onde che si muove come abbiamo visto con velocità identicata con la velocità di gruppo descriva le stesse traiettorie della particella che segue la meccanica di Newton. Per questo imponiamo che:

$$v_g = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\mathbf{x}))}$$

Sappiamo inoltre che:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Ora  $\lambda = 2\pi v_f / \omega$  e quindi:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{\omega}{v_f} = \frac{d}{d\omega} (\omega f(\omega) \sqrt{E - V(\mathbf{x})})$$

A questo punto abbiamo una equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} (\omega f(\omega) \sqrt{E - V(\mathbf{x})}) &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(\mathbf{x})}} \\ \frac{d}{d\omega} [\omega f(\omega)] \sqrt{E - V(\mathbf{x})} + \frac{\omega f(\omega) E'(\omega)}{2\sqrt{E - V(\mathbf{x})}} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(\mathbf{x})}} \end{aligned}$$

o anche riarrangiando i vari termini:

$$\frac{d}{d\omega} [\omega f(\omega)] = \left( \sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2} \omega f(\omega) E'(\omega) \right) / (E - V(\mathbf{x}))$$

A questo punto notiamo che il membro di sinistra dell'equazione non dipende da  $x$  e l'unica possibilità è che entrambi i membri dell'equazione siano uguali a zero! Per convincersene basta derivare rispetto a  $x$ , a sinistra abbiamo 0 e a destra rimane il numeratore della frazione moltiplicato per la derivata del denominatore, che non è nullo a meno del caso banale  $V = \text{costante}$ . Dunque

$$\omega f(\omega) = K$$

per una qualche costante  $K$ , e anche

$$\frac{1}{2} K E'(\omega) = \sqrt{\frac{m}{2}} \rightarrow E(\omega) = \frac{\sqrt{2m}}{K} (\omega - \omega_0)$$

La relazione tra  $E$  ed  $\omega$  è quindi di proporzionalità, la costante di integrazione  $\omega_0$  si può porre uguale a zero sfruttando il fatto che anche  $V(\mathbf{x})$  è a priori definita a meno di una costante additiva, e la costante di proporzionalità  $\frac{\sqrt{2m}}{K}$  che ha le dimensioni di un'azione deve essere identificata con la costante di Planck. Dunque  $K = \frac{\sqrt{2m}}{h}$ , una relazione che utilizzeremo tra poco. Rimane da sfruttare la relazione da cui siamo partiti, quella che individua la velocità di fase in funzione delle grandezze meccaniche:

$$v_f = \frac{1}{f(\omega) \sqrt{E - V(\mathbf{x})}} = \frac{\sqrt{2m}\omega}{\omega f(\omega) p}$$

dove si è richiamata la relazione tra energia cinetica e momento lineare  $p$ . Inserendo il valore di  $\lambda v = v_f$  otteniamo infine:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

che è la relazione di De Broglie mentre abbiamo ricavato anche:

$$E(\omega) = \hbar\omega$$

che è la relazione di Planck Einstein. Quindi partendo dall'analogia tra meccanica e ottica ondulatoria siamo riusciti a ricavare sia la relazione di De Broglie che quella di Planck - Einstein.

#### 4. L'equazione di Schroedinger per la particella libera

Imponendo la dipendenza armonica dal tempo dell'equazione di D'Alembert si ottiene l'equazione di Helmholtz

$$\nabla^2\Phi + \left(\frac{\omega}{v_f}\right)^2 \Phi = 0$$

dove come si è visto prima

$$\frac{1}{v_f} = \frac{k}{\omega} \cdot \sqrt{E - V(x)} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar\omega} \cdot \sqrt{E - V(x)}$$

Sostituendo nell'equazione di Helmholtz si ottiene l'equazione di Schroedinger

$$\nabla^2\Phi + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - V(x)) \Phi = 0$$

che è preferibile scrivere nella forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi + V(x)\Phi = E\Phi$$

Considerando ora una funzione dipendente dal tempo  $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$  del tipo

$$\Psi = \Psi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t}\Phi(\vec{x}) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\Phi(\vec{x})$$

Derivando il membro a destra si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-iEt/\hbar} = -i\frac{E}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} \rightarrow E \Leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Sostituendo  $E$  nella (1) si ha

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(x)\Psi$$

Considerando ora il caso particella libera in cui il potenziale  $V(x)$  è nullo si ottiene

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

che ammette come famiglia di soluzioni le onde piane, e semplificando ulteriormente si ha

$$\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi$$

Si può notare che l'equazione è analoga a quella di diffusione del calore

$$\frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\nabla^2 T$$

La differenza sta nel prendere in considerazione la reversibilità del processo, che non avviene nel caso del calore ma è possibile per le funzioni d'onda. La differenza delle due tipologie di soluzione

è determinata dalla presenza dell'unità immaginaria  $i$  nei coefficienti ( $\frac{D}{2} = \frac{i\hbar}{2m}$ ), argomento che verrà ripreso in seguito.

**4.1. La soluzione con la trasformata di Fourier.** Si osserva che la soluzione generale dell'equazione può essere scritta come sovrapposizione arbitraria di onde piane ( $\exp\{-i\frac{E}{\hbar}t + ikx\} = \exp\{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t + ikx\}$ ) una volta nota la condizione iniziale al tempo  $t = 0$ . (Nota: tutti gli integrali che compariranno sono calcolati su tutto l'asse reale).

Si ha quindi che:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int a(k) e^{-\frac{ik^2\hbar t}{2m} + ikx} dk \rightarrow \Psi(\vec{x}, 0) = \int a(k) e^{ikx} dk$$

e imponendo per semplicità che sia una gaussiana

$$\Psi(\vec{x}, 0) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

segue

$$a(k) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi(\vec{x}, 0) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma} - ikx}}{\sqrt{2\pi\sigma}} dk = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}$$

Sostituendo nella funzione d'onda

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{ik^2\hbar t}{2m} + ikx - \frac{\sigma k^2}{2}} dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{k^2}{2} \left(\frac{i\hbar t}{m} + \sigma\right) + ikx} dk = G \cdot e^{-\frac{x^2}{2\left(i\frac{\hbar}{m}t + \sigma\right)}}$$

si trovano soluzioni di tipo gaussiano con  $\sigma' = \sigma + i\hbar t/m$ . La quantità di interesse è  $|\Psi|^2$  che rappresenta la densità di probabilità di trovare un elettrone in un certo volume dello spazio, nonostante fosse stata battezzata da Schrodinger come la densità di carica.

Considerando quindi

$$|\Psi|^2 = \Psi\bar{\Psi} = e^{-\frac{x^2}{2\left(i\frac{\hbar}{m}t + \sigma\right)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\left(-i\frac{\hbar}{m}t + \sigma\right)}} = e^{-\frac{x^2}{2} \frac{2\sigma}{\left[\sigma^2 + \left(\frac{\hbar}{m}t\right)^2\right]}}$$

si ottiene una gaussiana la cui ampiezza varia nel tempo  $\sigma(t) = \sigma + \frac{(\hbar t)^2}{m^2\sigma}$ .

Questa forma tuttavia non fa pensare ad un fenomeno reversibile in quanto non invariante per riflessione temporale, se si considera invece una forma complessa del tipo  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$  con  $\sigma_2(t) = \sigma_2 + \frac{\hbar}{m}t$  si ha che la larghezza di  $|\Psi|^2$  è  $\sigma_1^2 + \left(\sigma_2 + \frac{\hbar}{m}t\right)^2$

A differenza del caso precedente si può considerare inizialmente  $\sigma_2$  negativa in modo che all'aumentare del tempo  $\sigma$  sia minore e quindi la gaussiana più piccata. Successivamente si avrà un tempo per cui la larghezza è minima  $\sigma_{\min} = \sigma_1$ , per poi tornare ad aumentare per tempi maggiori, con la gaussiana che tornerà ad allargarsi, rispettando così la simmetria temporale.

Inoltre si ha che tanto più è piccola la  $\sigma$  iniziale tanto più veloce l'allargamento.

**4.2. La soluzione numerica nel caso generale.** L'equazione di Schrodinger ottenuta

$$\left(\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} = i\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi\right)$$

può essere risolta al calcolatore tramite metodi di analisi numerica, tra questi vi è il metodo split-step di Fourier. Questo metodo è un metodo pseudo-spettrale e permette di risolvere equazioni alle derivate parziali lineari e non in piccoli passi  $dt$ . Come primo esempio consideriamo l'equazione di Schrodinger in una dimensione ( $x$ ) a potenziale nullo. Per risolvere questa equazione è necessario

applicare prima la trasformata di Fourier, avanzare di un passo e poi antitrasformare, questo perchè il passo si trova nello spazio delle frequenze. Si ha quindi:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \hat{A} \Psi$$

dove  $\hat{A}$  è l'operatore  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Per semplicità si pone  $\hbar = 1$  e  $m = \frac{1}{2}$ , e si nota che la soluzione dell'equazione trovata è della forma esponenziale complessa:

$$\Psi(x, t) = e^{-it\hat{A}}\Psi(x, 0)$$

Si può scrivere quindi che:

$$\Psi(x, t + dt) = e^{-it\hat{A}}\Psi(x, t)$$

Ora si può usare il fatto che nello spazio delle frequenze, l'operatore  $\hat{A}$  può essere convertito in un numero sostituendo  $ik$  a  $\frac{\partial}{\partial x}$  dove  $k$  è il numero d'onda associato con la trasformata di Fourier.

In questo modo prendiamo la trasformata di Fourier di  $\Psi(x, t)$  la moltiplichiamo per  $e^{-ik^2 dt}$  e infine eseguiamo l'antitrasformata di Fourier per tornare nella metrica Euclidea ottenendo  $\Psi(x, t + dt)$ .

Con questo metodo è molto semplice verificare l'invarianza temporale infatti per tornare a  $\Psi(x, t)$  da  $\Psi(x, t + dt)$  basta applicare lo stesso metodo applicato prima alla funzione coniugata  $\overline{\Psi(x, t + dt)}$ .

(Il programma si può trovare su Dropbox/Fisica3/matlab/wavepacket.m)

Il metodo split-step di Fourier si può applicare nel caso in cui  $V(x) \neq 0$  (con qualche piccolo accorgimento). La soluzione all'equazione di Schrodinger ha sempre la forma di un esponenziale complesso ma contiene anche l'operatore  $\hat{B} = V(x)$ :

$$\Psi(x, t) = e^{-it(\hat{A}+\hat{B})}\Psi(x, 0)$$

Siccome  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono operatori, in genere non commutano, tuttavia si può approssimare la soluzione di  $\Psi(x, t)$  in questo modo:

$$\Psi(x, t + dt) \approx e^{-i\hat{A} dt} e^{-i\hat{B} dt} \Psi(x, t)$$

La formula di Baker-Hausdorff ci assicura che l'errore commesso sarà al secondo ordine  $O(dt^2)$ .

La parte con l'operatore  $\hat{B}$  può essere calcolata direttamente usando la funzione d'onda al tempo  $t$  mentre per la parte dell'operatore  $\hat{A}$  si utilizza la trasformata di Fourier in modo analogo al caso particella libera. Riassumendo:

- (1) si applica la trasformata di Fourier della funzione d'onda  $\Psi$
- (2) si avanza nello spazio delle frequenze moltiplicando per  $e^{-ik^2 dt}$
- (3) si ritorna nello spazio euclideo applicando l'antitrasformata
- (4) si avanza nello spazio euclideo moltiplicando per  $e^{-i\hat{B} dt}$

In un'unica espressione diventa:

$$\Psi(x, t + dt) = e^{-iV dt} \cdot F^{-1}[e^{-ik^2 dt} \cdot F[\Psi]]$$

Una variante più accurata di questo metodo è il metodo simmetrico o leapfrog; invece di effettuare un passo solo  $dt$ , si effettua un mezzo passo, poi uno completo e poi un mezzo passo indietro. In questo modo l'errore commesso è dell'ordine di  $dt^3$  per passi  $dt$ .

(Questo esempio si può trovare su Dropbox/matlab/doublewell.m). Si è utilizzata la Fast Fourier Transform per velocizzare i calcoli e il potenziale utilizzato è del tipo:  $V(x) = V_0 \cdot \frac{(x^2 - \omega^2)^2}{\omega^4}$

## 5. Il principio di indeterminazione di Heisenberg

**5.1. Formulazione per un pacchetto gaussiano.** Si è detto che le funzioni d'onda hanno come principale importanza fisica quella di rappresentare la densità di probabilità che la particella si trovi in un certo volume (nota come regola di Born) per cui ad esempio si può scrivere

$$\langle x \rangle = \int |\Psi(\vec{x}, t)|^2 x d^3x$$

facendo previsioni statistiche o calcolare la deviazione standard sulla posizione ( $\Delta x$  con  $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ ).

Considerando ora lo sviluppo in serie di Fourier della funzione d'onda si ha

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar} \Phi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

dove  $\mathbf{p}$  è il momento della particella,  $|\Phi|^2$  è la densità di probabilità di momento lineare e si può trovare analogamente a prima la deviazione standard  $\langle p \rangle$ . Sappiamo che se  $\Phi(\mathbf{p})$  è una gaussiana allora lo è anche  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ .

Ponendo quindi  $\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{4\sigma}}$  in modo che  $|\Phi|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{2\sigma}}$  risulti normalizzata.

Sostituendo nella funzione d'onda

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar - (\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2/(4\sigma)} d\mathbf{p}$$

e ponendo  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$  si ha

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}_0/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{q}/\hbar - \mathbf{q}^2/(4\sigma)} d\mathbf{q} = F(\mathbf{x}) \cdot e^{-\sigma\mathbf{x}^2}$$

avendo applicato l'antitrasformata di Fourier. Si può concludere che:

- (1) la soluzione è di tipo gaussiano
- (2) la trasformata di Fourier porta una gaussiana larga in una piccata e viceversa  $\sigma' = \frac{1}{\sigma}$

Con questi strumenti Heisenberg si propone di trovare un limite inferiore alla misura contemporanea di sue grandezze distinte. Dati  $\langle x \rangle = x_0$  e  $\langle p \rangle = p_0$  ci si può mettere in condizioni tali che  $x_0 = 0$  e  $v_{sdr} = p_0/m$  in quanto al deviazione standard non dipende dal sistema di riferimento in cui ci si trova.

Consideriamo  $\Psi$  reale e la disuguaglianza matematica ovvia

$$0 \leq \int \left| \left( \frac{d}{dt} + \alpha x \right) \Psi(x) \right|^2 dx = \int (\Psi' + \alpha x \Psi)^2 dx = \int [(\Psi')^2 + 2\alpha x \Psi \Psi' + \alpha^2 x^2 \Psi^2] dx \quad (*)$$

oltre al fatto che  $\int |\Psi|^2 dx = 1$  ovvero in modo che sia normalizzata essendo una probabilità.

Per trovare  $\langle p \rangle = \int p |\Phi(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}$ , essendo  $\Phi$  la trasformata di Fourier di  $\Psi$ ,  $\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(x) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar} dx$ , si trova

$$p \Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(x) p e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int i\hbar \Psi(x) \frac{d}{dx} e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int (i\hbar \Psi'(x)) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar} dx \quad (**).$$

Se ne deduce inoltre che la trasformata di Fourier di  $p\Phi(\mathbf{p})$  è  $-i\hbar\Psi'(x)$ .

Sostituendo si trova

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \int p |\Phi(p)|^2 dp = \int \bar{\Phi} p \Phi dp = \\ &= \int \bar{\Phi} \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int (i\hbar\Psi(x)') e^{-ixp/\hbar} dx \right) dp = \\ &= \int (-i\hbar\Psi') \bar{\Psi}(x) dx = \int \bar{\Psi} \hat{p} \Psi dx\end{aligned}$$

in cui si ha l'operatore momento  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ .

Considerando quindi

$$\langle p^2 \rangle = \int \bar{\Psi} \hat{p}^2 \Psi dx = -\hbar^2 \int \bar{\Psi} \frac{d^2}{dx^2} \Psi dx \underset{\text{parti}}{=} \hbar^2 \int \bar{\Psi}' \Psi dx = \hbar^2 \int |\Psi'|^2 dx \quad (**).$$

Sostituendo il risultato ottenuto in (\*) si ha

$$0 \leq \frac{\langle p^2 \rangle}{\hbar^2} + \int 2\alpha x \Psi \Psi' dx + \alpha^2 \langle x^2 \rangle$$

in quanto  $\int (\Psi')^2 dx = \frac{\langle p^2 \rangle}{\hbar^2}$  e  $\int x^2 |\Psi|^2 dx = \langle x^2 \rangle$ .

Si può riscrivere il termine centrale

$$2\alpha \int \frac{x}{2} (\Psi^2)' dx \underset{\text{parti}}{=} -\alpha \int \Psi^2 dx = -\alpha$$

(integrando per parti e con le stesse osservazioni di (\*\*)).

Mettendo il tutto insieme si riscrive come

$$0 \leq \frac{\langle p^2 \rangle}{\hbar^2} - \alpha + \alpha^2 \langle x^2 \rangle$$

il che implica che l'equazione (in  $\alpha$ ) non abbia radici reali distinte, quindi si ha che

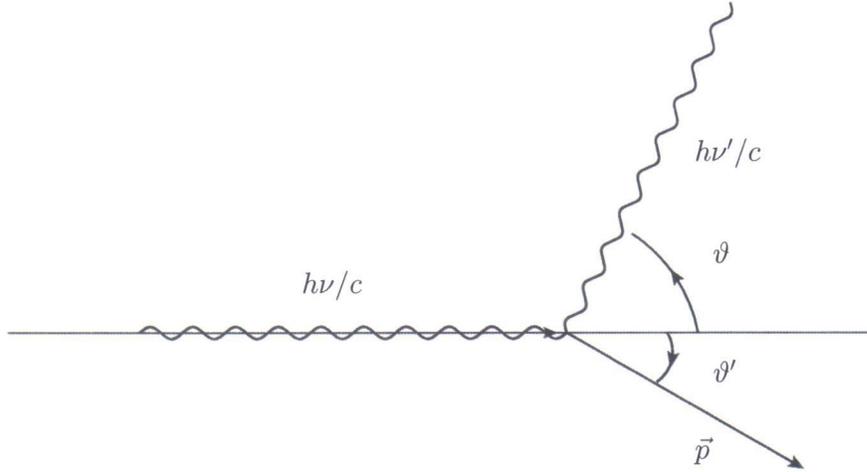
$$\Delta = 1 - 4 \frac{\langle x^2 \rangle \cdot \langle p^2 \rangle}{\hbar^2}$$

e cioè  $\langle x^2 \rangle \cdot \langle p^2 \rangle \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ . Concludendo si ha

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

che rappresenta il limite naturale di incertezza per la misurazione. Questo risultato è profondamente radicato nella natura ondulatoria delle particelle. Ad esempio se si considera un segnale variabile nel tempo, si presenta l'impossibilità nel misurare la frequenza in un dato istante, ma è vneccessario considerare un intervallo temporale, e ciò limita la precisione della misura.

**5.2. Un argomento intuitivo per la disuguaglianza.** Il principio di indeterminazione di Heisenberg mostrato sopra per un pacchetto gaussiano trova supporto anche dal punto di vista fisico. Si vuole misurare la posizione e la velocità di un elettrone fermo nello spazio: per farlo si posiziona un microscopio e si illumina come mostrato in figura l'elettrone inizialmente in quiete con luce a frequenza  $\nu$  e energia  $\epsilon$ .



Considerando la metrica spazio-tempo di Minkowski  $(c, -1, -1, -1)$  si può rappresentare il momento del fotone con un tetravettore costituito dall' Energia e dal vettore momento lineare  $q^\mu = (\vec{q}, \varepsilon)$ , analogamente il tetramomento dell'elettrone sarà dato da  $p^\mu = (\vec{p}, E)$ .

Nell'istante prima dell'urto avremo il tetramomento dell'elettrone fermo  $p^\mu = (m_0c^2, 0)$  e quello del fotone  $q^\mu = (\varepsilon, \vec{q})$ . In Fisica relativistica la relazione tra energia e momento è data dalla seguente equazione: *(Si veda l'Appendice per la dimostrazione)*

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

dove  $m_0$  è la massa relativistica misurata in un sistema di riferimento solidale ad essa,  $E$  l'energia totale e  $p$  il momento della particella. Se la particella ha massa  $m_0$  quasi nulla (in questo caso il fotone) l'equazione si riduce a

$$E = pc$$

Considerando che il fotone viene emesso lungo la direzione  $x$  si può riscrivere il tetramomento in questo modo:

$$q^\mu = (|q|, |q|, 0, 0)$$

dove  $|q|$  per la legge di De Broglie vale:

$$|q| = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow |q|c = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

Si consideri l'istante dopo l'urto tra le due particelle:

I due tetramomenti saranno dati da  $p'^\mu = (E/c, \vec{p})$  e  $q'^\mu = (|q'|, \vec{q}')$ . Parametrizziamo il fenomeno fissando l'angolo  $\theta$  e utilizziamo la conservazione del tetramomento nello spazio-tempo di Minkowski: Si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} mc^2 + |q|c = E + |q'|c \\ \vec{q} + 0 = \vec{p} + \vec{q}' \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava subito che  $\vec{p} = \vec{q} - \vec{q}'$ , dove  $\vec{p}$  è il momento trasferito. Si osserva la prima equazione:  $mc^2 + \varepsilon = \varepsilon' + E$  Invertendo la relazione  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$  si ottiene

$$(E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \rightarrow E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Sostituendo queste considerazioni nella prima Equazione della conservazione del tetramomento si ricava (si veda la seguente sezione 5.3)

$$mc^2 + |q|c = |q'|c + c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Adesso è questione solo di semplice algebra:

$$\begin{aligned} mc^2 + c(|q| - |q'|) &= c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = c\sqrt{(q - q')^2 + m^2c^2} \\ &\rightarrow m^2c^4 + 2mc^3(|q| - |q'|) + c^2(|q| + |q'|)^2 = m^2c^4 + (q - q')^2c^2 \\ &\rightarrow 2mc^3(|q| - |q'|) = q^2c^2 + q'^2c^2 - 2c\vec{q} \cdot \vec{q}' - c^2(q^2 + q'^2 - 2|q||q'|) \\ &\rightarrow mc^3(|q| - |q'|) = c^2(|q||q'| - |q||q'| \cos \theta) \\ &\rightarrow mc(|q| - |q'|) = |q||q'|(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Da qui si può ricavare facilmente che:

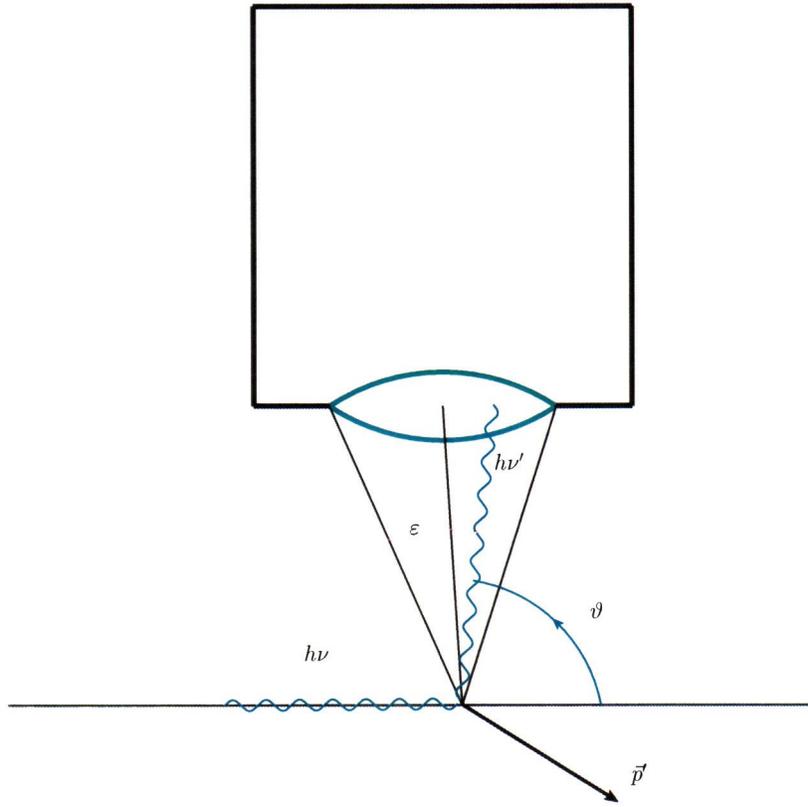
$$|q'| = \frac{|q|}{1 + \frac{|q|(1 - \cos \theta)}{mc}}$$

Se si sostituisce nella seconda equazione del sistema  $p_x = |q| - |q'| \cos \theta$  si ottiene:

$$p_x = \frac{|q|(1 - \cos \theta)(1 + \frac{|q|}{mc})}{1 + \frac{|q|}{mc}(1 - \cos \theta)}$$

*Attenzione:* per l'esperimento si dovrà utilizzare una luce con frequenza tale che  $h\nu \ll mc^2$  altrimenti si rischia di creare coppie elettrone-positrone. Dunque se  $cq = h\nu \ll mc^2 \rightarrow q \ll mc$  e quindi il momento dell'elettrone si può approssimare in questo modo:

$$p_x \approx |q|(1 - \cos \theta)$$



Inoltre se il fotone diffuso viene raccolto dal microscopio si deve avere che  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  e quindi:

$$p_x = |q| - |q| \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) = |q|(1 \pm \sin \varepsilon)$$

la parte a destra è ovviamente l'incertezza sul momento che indichiamo con  $\Delta p_x$

$$\Delta p_x \approx |q| \sin \varepsilon = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varepsilon$$

Dai principi dell'ottica sappiamo che il potere risolutivo del microscopio dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  e dall'apertura  $\varepsilon$  dell'obiettivo: si può affermare che la posizione dell'elettrone lungo l'asse x avrà un'incertezza pari a  $\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$  con un certo grado di approssimazione.

In conclusione si ottiene:

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varepsilon = h$$

Che soddisfa in prima approssimazione il principio di indeterminazione di Heisenberg.

**5.3. Effetto Compton.** Dalla relazione

$$mc(|q| - |q'|) = |q||q'|(1 - \cos \theta)$$

Si può ricavare la formula dell'effetto Compton. Ricordando la relazione di De Broglie  $|q| = 2\pi\hbar/\lambda = h/\lambda$ , si ottiene:

$$mc \left( \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) = \frac{h^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos \theta)$$

Portando a sinistra i due  $\lambda$  otteniamo la relazione dell'effetto Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

### 6. La relazione relativistica E(p)

In meccanica relativistica l'Azione per una particella libera si esprime in questo modo:

$$S = -mc \int ds$$

Dove  $ds$  è l'invariante per la metrica di Minkowski

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Nel nostro caso abbiamo  $dy$  e  $dz = 0$ , se si raccoglie  $c$  e  $dt$  si ottiene:

$$S = \int -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$$

E ricordando che l'azione non è altro che l'integrale della Lagrangiana:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Ora possiamo utilizzare l'approccio Hamiltoniano valido del tutto in generale:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{mc^2}{1 - (v/c)^2} \cdot (-) \frac{\vec{v}}{c^2} \\ &\rightarrow E = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L \end{aligned}$$

Applicando un po' di algebra arriviamo al risultato desiderato

$$(E/c)^2 - p^2 = m^2 c^2 \rightarrow E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Si osserva che se ci si pone in condizioni classiche considerando  $p \ll mc$  l'equazione si riscrive:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2}$$

Sviluppando in serie di Taylor la radice si ottiene:

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{mc} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{p}{mc} \right)^4 + o\left( \frac{p}{mc} \right)^4 = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2} + \dots \right)$$

Come si nota il primo termine è dato dall'energia a riposo mentre il secondo termine è riconducibile al caso classico dell'Hamiltoniana di particella libera.

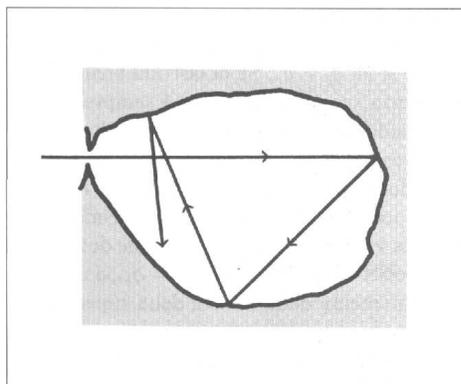
## Il corpo nero

### 1. Introduzione al problema del corpo nero

**1.1. Modello e descrizione fisica.** Cos'è un corpo nero e perché riveste un ruolo così importante nella storia della fisica moderna?

Innanzitutto, si definisce corpo nero un oggetto ideale che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo investe senza rifletterla. Il corpo nero assorbe dunque tutta l'energia incidente e, per il principio di conservazione, reirradia totalmente la quantità assorbita, dovendo quindi il suo nome unicamente all'assenza di riflessione; possiede perciò coefficiente di emissione uguale a quello di assorbimento e pari ad uno. I corpi reali invece si discostano più o meno sensibilmente da questa definizione e sono perciò detti corpi grigi. In altri termini si può dire che tutti i corpi reali si comportano più o meno come corpi neri a meno della loro riflettività e trasmittanza.

Dal punto di vista visivo, un corpo nero può essere interpretato come una cavità dotata di un orifizio che permette l'ingresso di radiazione elettromagnetica ma rende molto improbabile la sua uscita dallo stesso.



Questo modello costituisce un'ottima approssimazione di corpo nero: basti pensare a un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata. In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irraggiata dal foro, ma il tipo di radiazione emesso dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, quest'ultima viene convertita in radiazione nel dominio delle microonde o nell'infrarosso lontano, in seguito all'assorbimento e riemissione da parte delle pareti (che nel nostro caso sono a temperatura ambiente), e noi non siamo in grado di vedere la radiazione che esce dal foro. Se le pareti del corpo nero fossero a temperatura elevata, diciamo intorno a 1000 °C, allora il foro riemetterebbe radiazione visibile, e il corpo non sarebbe affatto nero. Il nome corpo nero deriva quindi dalla nostra percezione

quotidiana riguardo all'emissività dei corpi in corrispondenza dei diversi colori.

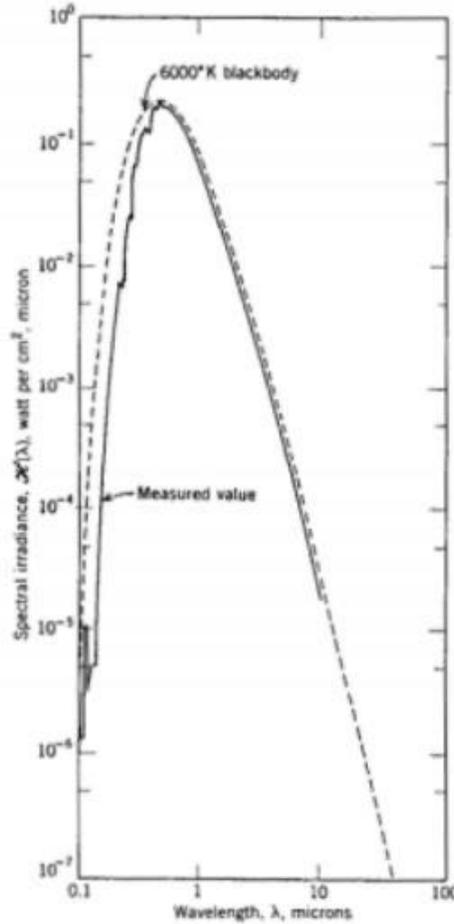
Tuttavia, il modello del corpo nero non rappresenta unicamente un'approssimazione matematica astratta ma può essere ricondotta a molti esempi fisici concreti: ad esempio, il sole si comporta come un ottimo corpo nero. Per convincersi di ciò, consideriamo un cubo di lato 1 m e pratichiamo su di esso un piccolo foro circolare di raggio 1 mm; questo esempio riproduce in modo convincente la nostra definizione di corpo nero. Calcoliamo ora il rapporto tra la superficie del foro e il volume del cubo:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & r = 10^{-3} \text{ m} \\
 & S = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-6} \\
 & \frac{S}{V} = \frac{\pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{1 \text{ m}^3} = \pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}
 \end{aligned}$$

Ora allo stesso modo prendiamo in esame il Sole, in cui la superficie emittente (corrispondente al foro del caso precedente) è costituita da tutta la superficie esterna della stella. Procediamo allo stesso calcolo :

$$(21) \quad \frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r} = \frac{3}{6,957 \cdot 10^8} \approx 10^{-8} \text{ m}^{-1}$$

Possiamo quindi notare un fatto piuttosto inatteso: il Sole è più adatto a esemplificare il comportamento di un corpo nero rispetto al modello stesso con cui lo abbiamo descritto. Nell'immagine riportata, si nota infatti come lo spettro emissivo del Sole in funzione della frequenza rispecchi quasi esattamente il modello del corpo nero associato a una temperatura di 6000 K.



**1.2. Le leggi sperimentali: Boltzmann e Wien.** La radiazione emessa da un corpo nero viene detta radiazione del corpo nero mentre lo spettro di corpo nero rappresenta la densità di energia della radiazione emessa in funzione della lunghezza d'onda o della frequenza. Il concetto di corpo nero venne introdotto per la prima volta da Gustav Kirchhoff nel 1862 e, da quel momento in poi, numerosi esperimenti furono condotti per determinarne lo spettro di emissione. Da un punto di vista sperimentale, questo fenomeno è regolato da due leggi: la legge di Stefan-Boltzmann e la legge di Wien. La prima, scoperta sperimentalmente da Stefan nel 1879 e spiegata teoricamente per la prima volta da Boltzmann nel 1884 all'interno del quadro della termodinamica, stabilisce che l'emittanza di un corpo nero, ossia la potenza irraggiata per unità di superficie, è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura:

$$(22) \quad \phi = \sigma T^4$$

La legge di Wien esprime invece la densità del flusso di energia per intervallo infinitesimo di frequenza:

$$(23) \quad u(\nu) \propto \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

e si ricava andando a considerare per quale lunghezza d'onda si ha un massimo di emissione. In particolare, all'aumentare della temperatura del corpo nero, oltre ad emettere più potenza elettromagnetica per la legge di Stefan-Boltzmann, per la legge di Wien il corpo stesso emetterà il suo massimo, cioè il picco spettrale di radiazione, spostandosi sempre più verso frequenze più alte

(maggiore energia), passando così anche per il visibile come accade per le stelle. Questo giustifica la loro luminosità, che quindi è solo in apparente contrasto con la definizione di corpo nero.

Queste leggi sperimentali trovano il loro riscontro anche applicando semplici considerazioni termodinamiche riguardo all'eccitazione delle particelle che interagiscono con la radiazione.

Infatti l'origine dell'irradiazione elettromagnetica dei corpi per effetto macroscopico della temperatura  $T$  va ricercato a livello microscopico come conseguenza del moto di roto-vibrazione molecolare di agitazione termica e quindi delle correnti elettriche variabili nel tempo degli elementi portatori di carica elettrica (protoni ed elettroni). La frequenza  $f$  e l'intensità  $I$  dei fotoni emessi ovvero dell'onda elettromagnetica aumentano pertanto all'aumentare della temperatura  $T$  in conseguenza dell'aumentato moto di agitazione molecolare ovvero delle correnti elettriche atomico-molecolari associate.

La legge di Stefan-Boltzmann si può inoltre ricavare a partire dalla legge di Wien integrando la densità di flusso di energia lungo tutto lo spettro delle frequenze e introducendo la nuova variabile di integrazione  $x$ :

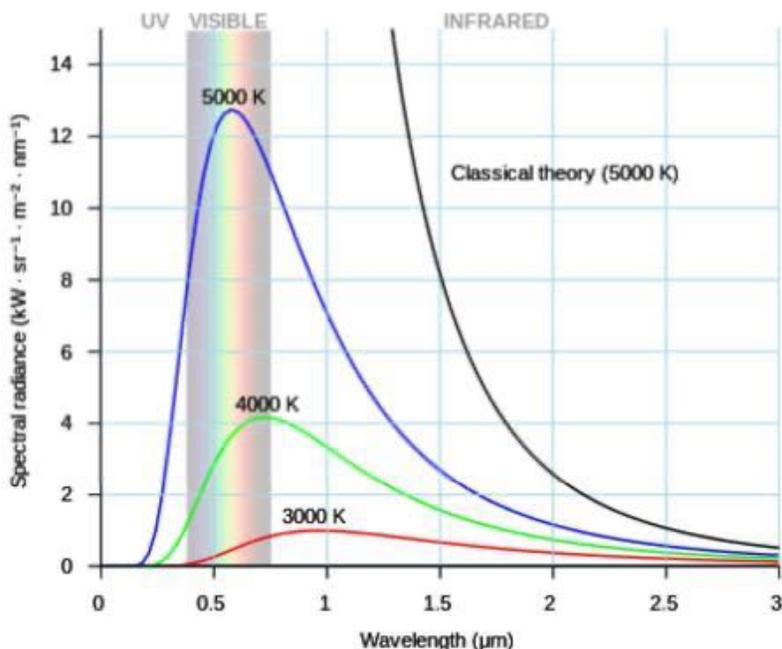
$$(24) \quad \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \int \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

$$\text{con } x = \frac{\nu}{T} \quad d\nu = T dx \quad \nu = T x$$

$$(25) \quad \int_0^{\infty} T^3 x^3 F(x) T dx = \int_0^{\infty} T^4 x^3 F(x) dx = T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx$$

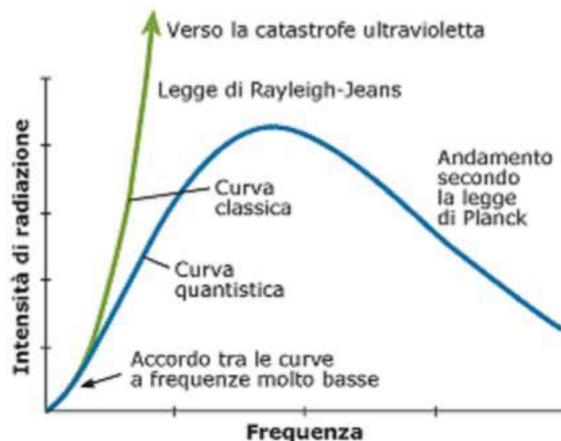
Si nota appunto che l'emittanza risultante è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, come previsto dalla legge di Stefan-Boltzmann.

**1.3. Lo spettro d'emissione e i problemi nella descrizione classica.** I dati sperimentali evidenziavano che lo spettro di corpo nero mostrava la caratteristica forma a campana (più o meno asimmetrica e più o meno schiacciata) dipendente unicamente dalla sua temperatura  $T$  e non dalla materia che lo compone.



La ricerca dei modi normali di oscillazione, grazie al quale si individuano le diverse frequenze proprie all'interno di una cavità, e l'applicazione del principio di equipartizione agli oscillatori

armonici portò alla formulazione della legge di Rayleigh-Jeans. Tuttavia non riproduce affatto i dati sperimentali! Solo nella prima parte dello spettro, per basse frequenze, essa descrive correttamente la curva sperimentale, mentre la densità spettrale di energia tende ad infinito per frequenze alte; questo è il così detto fenomeno della *catastrofe ultravioletta*. Inoltre si può notare che integrando la densità spettrale di energia su tutte le frequenze possibili si ottiene un'energia infinita!



La meccanica classica non era quindi in grado di spiegare il decadimento a zero dello spettro per alte frequenze. Si dovrà quindi attendere l'avvento di Planck per la risoluzione teorica del problema.

Egli infatti ipotizzò che la radiazione elettromagnetica fosse emessa e assorbita dagli atomi solo in pacchetti discreti, o quanti, di energia proporzionale alla frequenza dell'onda elettromagnetica. Nonostante questo importante successo, che rappresenta il primo mattone della nascente teoria dei quanti o meccanica quantistica, lo stesso Planck ritenne, per diversi anni, che i quanti fossero soltanto un espediente matematico per far tornare i conti e non un fenomeno reale.

Fu poi Einstein nel 1905 a riprendere e rilanciare la teoria dei quanti nell'ambito dei suoi studi sull'effetto fotoelettrico, per spiegare l'emissione di elettroni dalla superficie di un metallo colpito da radiazione elettromagnetica (effetto anche questo non spiegabile con la classica teoria ondulatoria di Maxwell). Secondo Albert Einstein non solo gli atomi emettono e assorbono energia per *pacchetti finiti* di energia, i quanti, ma è la stessa radiazione elettromagnetica ad essere costituita da quanti di luce, poi denominati fotoni nel 1926.

La comprensione del problema del corpo nero rappresenta quindi una vera e propria pietra miliare nella storia della fisica. Ci proponiamo quindi di ripercorrere i calcoli teorici che hanno portato alla formulazione della legge di Rayleigh-Jeans all'interno del contesto classico, per poi introdurre la rivoluzione dell'ipotesi di quantizzazione proposta da Planck.

## 2. Modi di oscillazione di una cavità

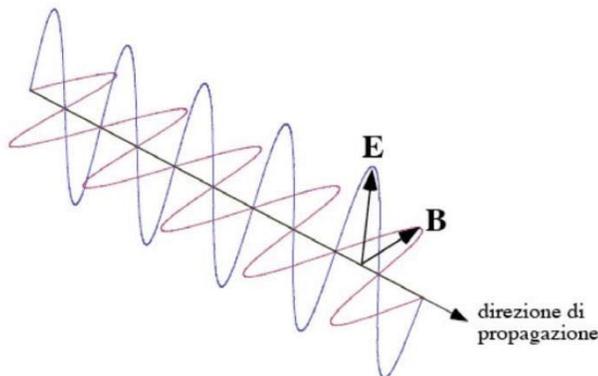
Per descrivere l'assorbimento e l'emissione di energia da parte del corpo nero, occorre introdurre l'equazione di D'Alembert che descrive la propagazione ondosa e il cosiddetto *problema di Dirichlet*, il quale prescrive precise condizioni di annullamento al contorno di definizione. L'equazione delle onde in tre dimensioni si scrive in questo modo:

$$(26) \quad \Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

in cui  $\Delta$  rappresenta l'operatore laplaciano:

$\Delta = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ . Le equazioni di Maxwell, elaborate nel 1865, avevano portato a sintesi

completa i fenomeni elettromagnetici e prevedevano l'esistenza di particolari configurazioni spaziali e temporali di campo elettrico e magnetico, le onde appunto, che si propagano nel vuoto a velocità  $c$ . Ricordiamo anzitutto che le onde elettromagnetiche sono onde trasversali: l'oscillazione del campo elettrico (e magnetico) dell'onda è perpendicolare alla direzione di propagazione, come mostrato nella figura.



L'equazione delle onde elettromagnetiche ha la seguente forma:

$$(27) \quad \nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

In questa riconosciamo l'equazione di D'Alembert in cui la funzione  $\phi$  è rappresentata da una qualunque componente del campo elettrico. Ma come si può rappresentare un'onda elettromagnetica che si propaga all'interno di una cavità risonante?

A questo punto, si giunge all'idea fondamentale: un corpo nero è oggetto in cui la materia che assorbe ed emette la radiazione è in equilibrio termico con la radiazione stessa. Se una parte della radiazione potesse sfuggire dal corpo nero, allora l'equilibrio si manterrebbe solo se venisse fornita tanta energia quanta ne sfugge per irraggiamento. In queste condizioni, occorre quindi cercare soluzioni periodiche dell'equazione d'onda; infatti non viene sottratta né aggiunta energia al sistema. Si può quindi fattorizzare la soluzione  $\phi$  nel prodotto di una funzione periodica nel tempo per una funzione  $\psi$  dipendente dalla posizione:

$$(28) \quad \phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \psi(\vec{x})$$

e quindi, derivando due volte rispetto al tempo, si può riscrivere l'equazione in questo modo:

$$(29) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -i\omega \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi = -\omega^2 \phi = e^{-i\omega t} \left( \Delta + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \psi(\vec{x}) = 0$$

Occorre infine imporre la condizione di annullamento al contorno, in quanto si cercano soluzioni nulle al bordo della superficie del corpo nero (problema di Dirichlet):

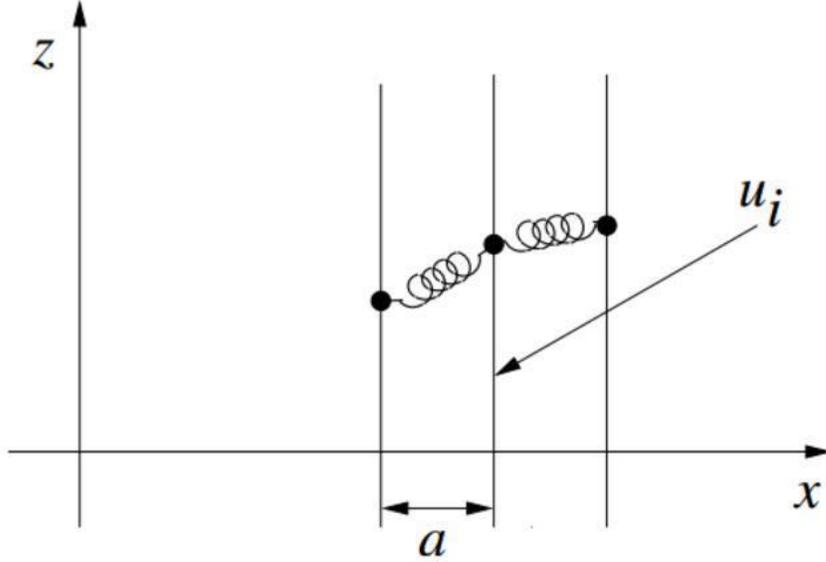
$$(30) \quad \psi|_{\partial c} = 0$$

### 2.1. Deduzione delle equazioni di D'Alembert e leggi della propagazione ondosa.

Prima di cercare le soluzioni dell'equazione d'onda nel caso della cavità risonante, viene proposta una breve digressione sull'equazione di D'Alembert e sulla sua derivazione, nel caso semplice di una corda vibrante in una dimensione.

Deduciamo ora l'equazione di d'Alembert pensando la corda modellata da un sistema discreto di punti, in ciascuno dei quali sia concentrata la massa di un trattino di corda. Consideriamo ad esempio il caso di corda con estremi fissi, e pensiamo la corda divisa in un certo numero di trattini

di lunghezza  $a$  (passo reticolare), ciascuno dei quali viene ridotto ad un punto (situato nel centro del trattino) e ammettiamo che questi punti possano muoversi solo trasversalmente (con i due punti estremi fissi). Se il numero dei punti mobili è  $N$ , e prendiamo come origine delle ascisse la posizione del punto fisso di sinistra, le ascisse dei punti saranno allora  $x_i = ia$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ , di cui  $x_0 = 0$  e  $x_{N+1} = l$  sono le ascisse dei punti estremi. Consideriamo inoltre i vari punti discreti in cui si è suddivisa la corda collegati a quelli adiacenti tramite una molla di costante elastica  $K$ , come mostrato dalla figura. Questa modellizzazione può apparire intuitiva se si pensa a una corda tesa che viene improvvisamente tagliata in un punto: i due lembi si allontanano e ciò dimostra come esista tra ogni punto della corda una forza di tensione che lo lega a quelli adiacenti.



Se dunque la corda ha lunghezza a riposo  $l$  e massa  $M$ , la massa  $m$  di ogni punto è data da  $m = M/(N + 2)$ , e si ha  $a = l/(N + 2)$ . Inoltre si ha una densità lineare di massa  $\rho$  data da  $m = \rho a$ . Se  $u_i$  è lo spostamento trasversale del punto  $i$ -esimo (con  $u_0 = u_{N+1} = 0$ ), allora le incognite del problema sono i movimenti degli  $N$  punti mobili parallelamente all'asse  $z$ , ovvero le  $N$  funzioni  $u_1(t), \dots, u_N(t)$ , le quali verranno determinate come soluzioni di un sistema di equazioni di Newton quando si tenga conto delle forze agenti sui vari punti.

Il passaggio al continuo verrà poi effettuato ammettendo l'esistenza di una funzione  $\tilde{u}(x, t)$  che ad ogni tempo  $t$  interpola spazialmente la *forma discretizzata* rappresentata dagli spostamenti discreti:  $\tilde{u}(ia, t) = u_i(t)$   $i = 1, \dots, N$ .

Dalla formula di Taylor al secondo ordine:

$$(31) \quad u_{i+1} = \tilde{u}(x_i + a) = \tilde{u}(x_i) + \tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3)$$

ovvero:

$$(32) \quad u_{i+1} - u_i = \tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3).$$

Analogamente si ha:

$$(33) \quad u_{i-1} - u_i = -\tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3)$$

e sommando si ottiene:

$$(34) \quad u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2 + O(a^4).$$

Ora, le equazioni del moto del sistema discretizzato sono evidentemente:

$$(35) \quad m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i+1}) - k(u_i - u_{i-1}), \quad (i = 1, \dots, N) \quad m\ddot{u}_i = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (i = 1, \dots, N)$$

tenendo conto delle forze elastiche esercitate dai punti vicini. Esprimendo dunque la massa in termini della densità,  $m = \rho a$ , e usando la formula di interpolazione di Taylor-Lagrange, l'equazione assume la forma:

$$(36) \quad \rho\ddot{u}_i = ka \cdot \tilde{u}_{xx}(x_i) + O(a^4)$$

Fissiamo ora un punto del reticolo, e denotiamo con  $x$  la sua ascissa. La formula appena ottenuta si scrive allora:

$$(37) \quad \rho\tilde{u}_{tt}(x, t) = ka \cdot \tilde{u}_{xx}(x, t) + O(a^4)$$

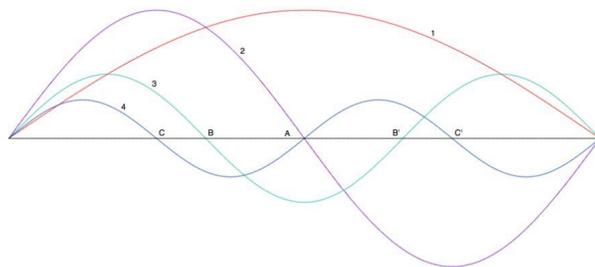
Pertanto, passando al limite per  $a \rightarrow 0$  e contemporaneamente facendo tenere  $k$  a infinito, si ottiene che  $ka \rightarrow \tau$ , dove  $\tau$  è una costante coincidente con la tensione, almeno nell'approssimazione di piccole oscillazioni (infatti in questo caso lo spostamento tra un punto e il successivo può essere approssimato alla distanza reticolare). Si ottiene infine l'equazione di d'Alembert nell'incognita  $u(x, t)$ :

$$(38) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c^2 = \tau/\rho$$

in cui  $c$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda sulla corda (uniforme essendo tensione e densità lineare costanti).

**2.2. Risoluzione dell'equazione d'onda in due casi semplici.** Prendiamo in analisi due problemi di Dirichlet, riguardanti la soluzione dell'equazione d'onda con condizioni di annullamento al contorno, propedeutici all'analisi del caso del corpo nero.

2.2.1. *La corda di violino fissa agli estremi.* Il primo è monodimensionale e riguarda una corda di violino di lunghezza  $L$  con gli estremi fissati. Da un punto di vista dell'impostazione delle equazioni risolutive, il problema è del tutto analogo allo studio di una cavità unidimensionale dotata di pareti metalliche, che ovviamente rappresenta un'astrazione ma sarà utile per comprendere i fenomeni di oscillazione legati al corpo nero.



Definita  $u$  la funzione che esprime l'altezza della corda alla posizione  $x$  e al tempo  $t$ , l'equazione si scrive:

$$(39) \quad u''(x) + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 u(x) = 0$$

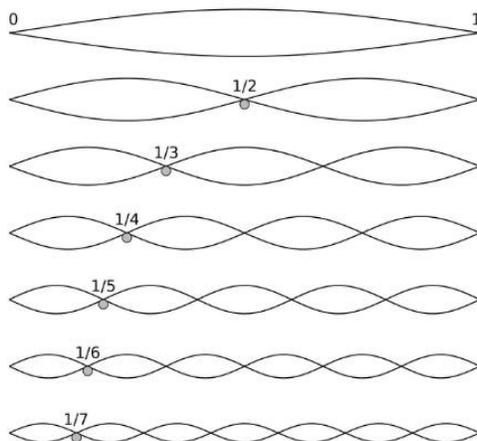
dove la velocità  $v$  di propagazione è data da:  $v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ . Definendo  $k$  come  $\frac{\omega}{v}$ , la soluzione sarà data da un combinazione lineare di due funzioni oscillanti (seno e coseno), la cui verifica è immediata per sostituzione nell'equazione:

$$(40) \quad u'' + k^2 u = 0 \quad u(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

dove A e B rappresentano le ampiezze definite dalle condizioni al contorno. Dato che  $u(0)=0$ , la costante B è pari a 0 e quindi sparisce il termine in coseno. Imponendo inoltre  $u(L)=0$ , si ottiene:

$$(41) \quad \begin{aligned} \sin kL &= 0 & k &= \frac{n\pi}{L} \\ \omega &= \frac{n\pi v}{L} \\ \omega_1 &= \frac{\pi v}{L} & \omega_n &= n\omega_1 \end{aligned}$$

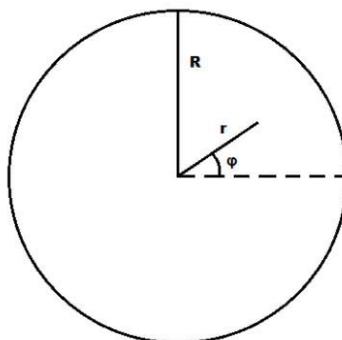
dove la prima rappresenta l'armonica fondamentale mentre queste ultime, al variare di n, rappresentano le armoniche superiori, ossia le frequenze di risonanza proprie del sistema in esame. Si noti come il numero di zeri individuati dalla funzione oscillante entro gli estremi del problema sia pari al grado dell'armonica.



**2.3. La pelle di tamburo a superficie circolare.** Il secondo esempio in esame riguarda una pelle di tamburo circolare fissa agli estremi, quindi il problema è a due dimensioni e l'equazione assume la forma:

$$(42) \quad \Delta u(x, y) + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 u = 0$$

con le condizioni al contorno:  $u(R, \varphi) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2$



Esprimendo il laplaciano in coordinate polari sul piano, si ottiene:

$$(43) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 u = 0$$

Per risolvere l'equazione, si cercano soluzioni fattorizzate del tipo  $u(r, \varphi) = f(r)\lambda(\varphi)$

$$(44) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf'(r)) \lambda(\varphi) + \frac{f(r)}{r^2} \lambda''(\varphi) + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 f \lambda = 0$$

Dividendo tutti i termini per  $f\lambda$ :

$$(45) \quad \frac{1}{rf(r)} \frac{d}{dr} (rf') + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\lambda''}{\lambda} \right] + \left(\frac{\omega^2}{v}\right) = 0$$

e isolando la parte angolare (dipendente da  $\phi$ ) e la parte radiale:

$$(46) \quad \frac{\lambda''}{\lambda} = - \left[ \frac{1}{rf} (rf')' + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \right] r^2 = \text{costante} = -l^2$$

I due termini devono essere uguali a una costante, chiamata  $l^2$ , in quanto altrimenti si otterrebbe una dipendenza funzionale tra  $r$  e  $\phi$  (che invece possono essere variati in modo indipendente l'uno dall'altro). L'equazione si trasforma quindi nel seguente sistema:

$$(47) \quad \begin{cases} \lambda = -l^2 \lambda \\ \frac{1}{rf} (rf')' + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \frac{l^2}{r^2} \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione, si trova:  $\lambda(\varphi) = Ae^{il\varphi}$

Occorre inoltre imporre come ulteriore condizione  $\lambda(\varphi + 2\pi) = \lambda(\varphi)$ , cioè la periodicità della soluzione. In caso contrario, la soluzione sarebbe discontinua e ciò significherebbe la frattura della membrana e quindi una perdita di significato fisico del problema. Tale imposizione comporta che  $l$  sia un numero intero ( $l=n$ ) e la seconda equazione può quindi essere riscritta, dopo opportuni calcoli differenziali e algebrici:

$$(48) \quad \frac{f''}{f} + \frac{f'}{rf} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = n^2$$

$$(49) \quad f'' + \frac{1}{r} f' + \left( \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0$$

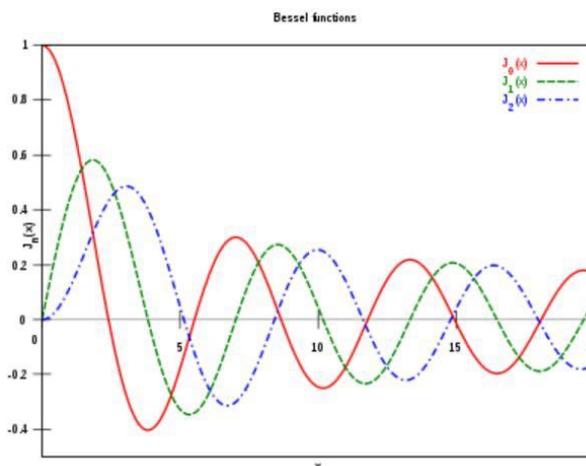
Quest'ultima equazione può essere ricondotta alla forma di una particolare equazione differenziale detta *Equazione di Bessel*:

$$(50) \quad \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0.$$

Le sue soluzioni sono chiamate *funzioni di Bessel cilindriche* di ordine  $\nu$  (nel nostro caso  $\nu$  corrisponde a  $n$ ) e la loro forma esplicita è:

$$(51) \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

Dove  $\Gamma$  è la funzione di Eulero  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$



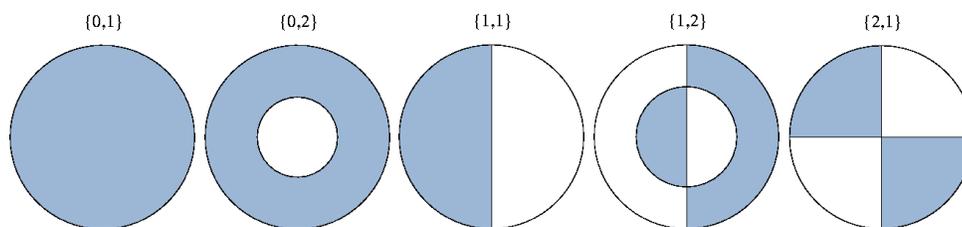
La soluzione completa del problema è quindi:

$$(52) \quad u(r, \varphi) = e^{il\varphi} J_n(r)$$

Imponendo la condizione di annullamento al contorno  $J_n(r) = 0$  si trovano gli zeri della funzione di Bessel, che corrispondono alle linee dei nodi dove la funzione d'onda si annulla.

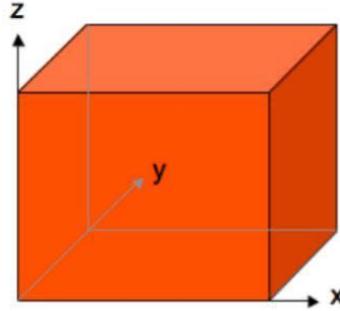
2.3.1. *Approfondimento: aree nodali di un tamburo.* Le linee nodali restano sempre in quiete durante l'oscillazione e quindi delimitano le cosiddette aree nodali, in opposizione di fase tra di loro (quando la funzione è positiva in un'area nodale è sicuramente negativa in quelle adiacenti). Le linee nodali si possono a loro volta distinguere in diametri nodali - che corrispondono agli zeri della funzione dipendente da  $\varphi$   $e^{im\varphi}$  e quindi alle oscillazioni tangenziali a  $r$  fissato - e in cerchi nodali - che corrispondono, invece, agli zeri della funzione  $\ell$ -esima di Bessel.

I modi normali di un tamburo sono quindi caratterizzati da due numeri interi  $(n,m)$ , dove  $n$  determina l'oscillazione tangenziale e  $m$  quella radiale (dal centro al bordo).



Il fisico Chladni nel 1787 ha ideato un sistema ingegnoso per evidenziare le curve nodali. Esso consiste nel cospargere la membrana di una polvere fine, ed eccitarla con un arco (in tempi moderni con un altoparlante). La polvere si addensa proprio lungo le curve nodali, evidenziandole chiaramente.

**2.4. Ricerca dei modi normali per una cavità cubica.** Affrontiamo ora il problema di determinare i modi di oscillazione di un'onda all'interno di una cavità cubica, con la condizione di annullamento al contorno. Il contenitore seleziona infatti le onde elettromagnetiche: all'equilibrio, al suo interno non ci possono essere onde elettromagnetiche arbitrarie, ma solo quelle che hanno campo elettrico nullo sulle pareti (se supponiamo che le pareti siano dei conduttori perfetti, allora il campo elettrico tangenziale deve essere nullo).



L'equazione d'onda in questo caso è tridimensionale (compare l'operatore laplaciano):

$$(53) \quad \Delta u + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u = 0$$

con le prescrizioni:

$$u(x, y, L) = u(x, y, 0) = 0$$

$$u(L, y, z) = u(0, y, z) = 0$$

$$u(x, L, z) = u(x, 0, z) = 0$$

Fattorizziamo la soluzione separando tra loro le variabili (in questo caso manteniamo le coordinate cartesiane):  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ . La derivata rispetto a  $x$  non interviene quindi sulle funzioni  $Y$  e  $Z$  (e così allo stesso modo per le altre due variabili) e poi dividendo per  $XYZ$  si ottiene:

$$(54) \quad X''(x)Y(y)Z(z) + XY''Z + XYZ'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 XYZ = 0$$

$$(55) \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

Per non ottenere una dipendenza funzionale delle variabili tra di loro (esse sono infatti indipendenti) i rapporti  $\frac{X''}{X}$ ,  $\frac{Y''}{Y}$  e  $\frac{Z''}{Z}$  saranno uguali a tre costanti rispettivamente ( $c_1, c_2, c_3$ ).

$$(56) \quad c_1 + c_2 + c_3 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Ridefinendo le costanti  $c_i = -k_i^2$ ,  $i=1,2,3$  (la costante è posta negativa per ottenere soluzioni oscillanti) risulta quindi il sistema:

$$(57) \quad \begin{cases} X'' + k_1^2 X = 0 \\ Y'' + k_2^2 Y = 0 \\ Z'' + k_3^2 Z = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al contorno già definite precedentemente. La soluzione per la funzione  $X$  è del tipo:  $X(x) = \sin k_1 x$  e l'imposizione  $X(L)=0$  comporta:

$$(58) \quad k_1 L = n_1 \pi \Rightarrow k_1 = \frac{n_1 \pi}{L}$$

e procedendo allo stesso modo anche per  $Y$  e  $Z$ , si ottiene  $k_2 = \frac{n_2 \pi}{L}$  e  $k_3 = \frac{n_3 \pi}{L}$  in cui  $n_1, n_2, n_3$  sono tre indici indipendenti che caratterizzano la frequenza di oscillazione tridimensionale.

Sostituendo ora  $k_1, k_2, k_3$  nell'equazione:

$$(59) \quad \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

si può determinare la frequenza angolare di un modo di oscillazione caratterizzato da tre particolare indici spaziali

$$(60) \quad \omega_{n_1, n_2, n_3} = \frac{c\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Ci si può ora domandare qual è il numero di modi di oscillazione, cioè di onde piane all'interno della cavità, con frequenza minore o uguale di un certo valore  $\omega_{\text{Max}}$ .

$$(61) \quad \#(\omega_{\text{Max}}) = \#(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) < \left(\frac{\omega L}{\pi c}\right)^2$$

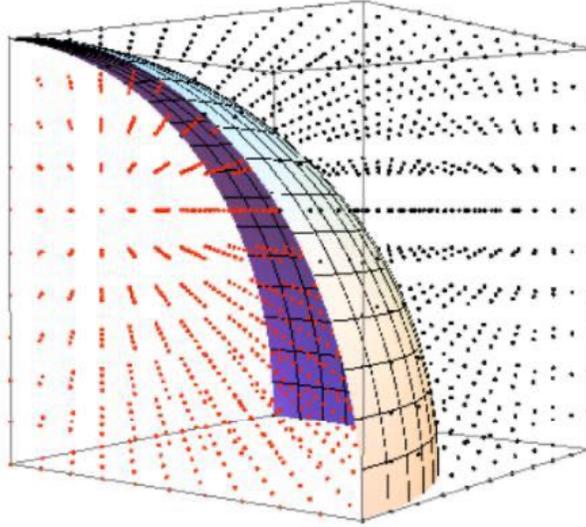
Per determinare questo valore, si può procedere sfruttando la proporzionalità, ad alte frequenze, tra il numero di terne naturali  $n_1, n_2$  e  $n_3$  la cui somma in quadratura è minore di un certo raggio  $R$  (ciascuna di queste terne occupa un cubetto di volume unitario) e il volume della sfera di raggio  $R$  che le contiene (diviso per 8, dato che si considera solo il settore con i tre indici positivi, in quanto numeri naturali).

Nel caso bidimensionale, ad esempio, la cardinalità dei modi di oscillazione è proporzionale all'area del settore circolare (quarto di circonferenza di raggio  $R$  nel piano):

$$(62) \quad \#(n_1^2 + n_2^2 < R^2) \propto \frac{\pi}{4} R^2$$

Nel caso tridimensionale, invece, il valore stimato per  $\omega \rightarrow \infty$  è:

$$(63) \quad \#(\omega_{\text{Max}}) \simeq \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\omega L}{\pi c}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{(2\pi)^3}{\pi^3} \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \frac{L^3}{8} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 L^3$$



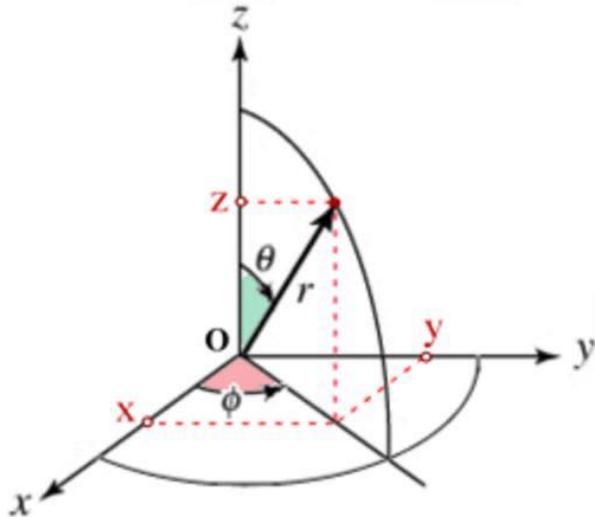
Derivando questa funzione cumulativa rispetto a  $\nu$  e dividendo per il volume  $V$ , si ottiene la densità di frequenze comprese nell'intervallo infinitesimo tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  per unità di volume:

$$(64) \quad u(\nu) \sim \frac{4\pi\nu^2}{c^3} + O(\nu)$$

**2.5. Conteggio dei modi di oscillazione per una cavità sferica.** Similmente al caso della cavità cubica, si procede ora al calcolo dei modi di oscillazione di un'onda all'interno di una cavità sferica, confrontando la densità dei modi normali per unità di frequenza nei due casi.

$$(65) \quad \Delta\phi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi = 0$$

Si vuole poi effettuare un cambio di coordinate, da cartesiane a sferiche  $(r, \theta, \varphi)$ . Con condizione al contorno  $(\phi(\mathbf{R}), \theta, \varphi) = 0$ .



In generale, una trasformazione in cui le coordinate trasformate sono dette  $\xi_i$  modifica l'elemento di linea  $ds$  in questo modo:

$$(66) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij}(\xi) d\xi_i d\xi_j$$

in cui  $g$  rappresenta la matrice metrica di trasformazione.

L'operatore laplaciano può quindi essere espresso in questo modo, utilizzando la matrice metrica:

$$(67) \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sqrt{\det g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

Nel caso del passaggio a coordinate sferiche, la matrice metrica è diagonale:

$$(68) \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$(69) \quad \sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$$

Effettuando i calcoli e le opportune semplificazioni algebriche, il laplaciano in coordinate sferiche è quindi dato da:

$$(70) \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2$$

Se si definisce  $\Lambda$  la parte angolare dell'operatore laplaciano (*laplaciano angolare*) e ricordando l'uguaglianza

$$(71) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r,$$

l'equazione d'onda si riscrive:

$$(72) \quad \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 r + \frac{\Lambda}{r^2} \right] \phi + k^2 \phi = 0.$$

Fattorizzando la soluzione in una funzione dipendente dal raggio e un'altra dipendente dai due angoli  $\theta$  e  $\phi$ :

$$(73) \quad \phi(r, \theta, \varphi) = f(r)Y(\theta, \varphi),$$

eseguendo i calcoli differenziali:

$$(74) \quad \frac{1}{r}(rf)''Y + \frac{f}{r^2}(\Delta Y) + k^2fY = 0$$

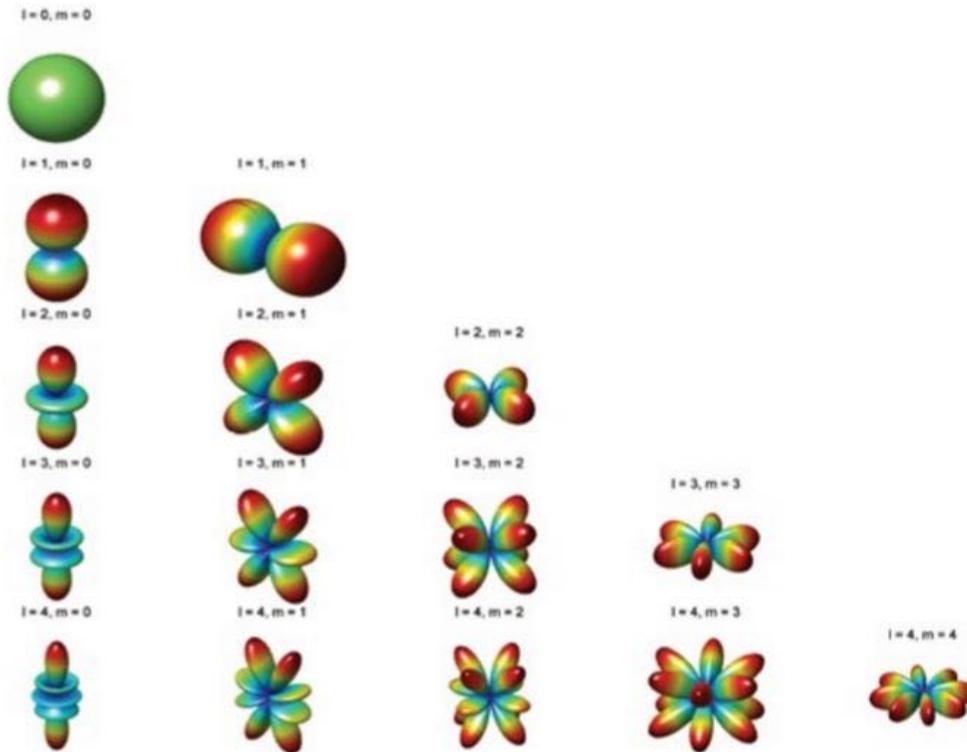
e dividendo per  $fY$ :

$$(75) \quad \frac{1}{rf}(rf)'' + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) + k^2 = 0.$$

Isolando la parte angolare e ponendola uguale a una costante  $C$  (per non ottenere una dipendenza funzionale diretta tra variabile radiale e variabili angolari), si ottiene il sistema di equazioni:

$$(76) \quad \begin{cases} \Delta Y = CY \\ (rf)'' + \frac{C(rf)}{r^2} + k^2(rf) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione, ponendo  $C = -l(l + 1)$ , ha come soluzioni le armoniche sferiche  $Y_l^m$ , in cui  $l$  è un indice intero e  $m$  intero varia da  $-l$  a  $l$  ( $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad |m| \leq l$ ); esistono quindi  $2l+1$  armoniche per ogni indice  $l$ .



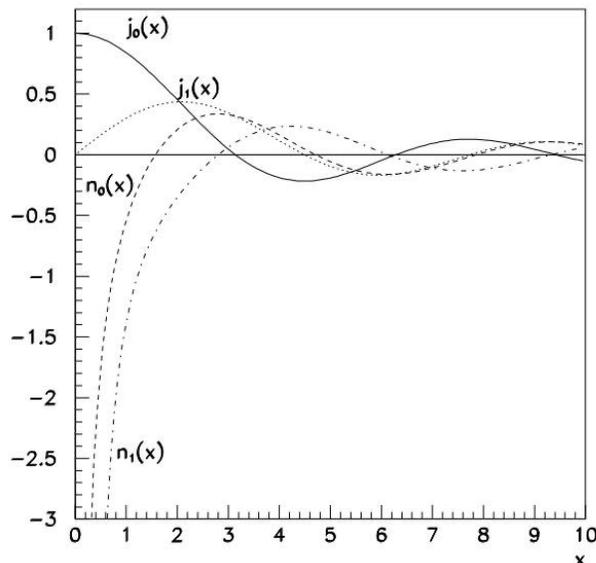
Ponendo  $u(r)=rf$  come nuova incognita, l'equazione radiale si riscrive:

$$(77) \quad u''(r) + \left(k^2 + \frac{C}{r^2}\right)u = 0$$

e ha come soluzioni le funzioni sferiche di Bessel. Queste sono caratterizzate da un indice semintero ( $\nu = n + 1/2$ ) e si ricavano da quelle cilindriche tramite la seguente formula:

$$(78) \quad j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(x).$$

Nell'immagine sono rappresentate le prime due funzioni sferiche  $j_0(x)$  e  $j_1(x)$ .



2.5.1. *La legge di Weyl.* Definita  $j_l(z)$  come funzione sferica di Bessel di ordine  $l$ , dall'imposizione  $j_l(z) = 0 \rightarrow j_l(kR)$  si possono quindi ricavare gli zeri della funzione, che però possono essere calcolati solo numericamente. Chiamando  $z_{n,l}$  l' $n$ -simo zero della funzione di Bessel  $l$ -sima, il conteggio di tali  $z_{n,l}$  compresi tra 0 e  $R$  (limite fisico del problema in cui le funzioni devono annullarsi) ci fornisce un'informazione sul numero di modi normali associati al problema (come si è visto nel caso unidimensionale della corda, il numero di zeri della funzione oscillante è pari al grado dell'armonica).

Impostando un opportuno calcolo numerico, si possono quindi contare per ogni funzione di Bessel con  $l = 0, \dots, \infty$  (basta calcolare fino ad un  $l$  abbastanza grande in quanto come si evince dall'immagine precedente al crescere di  $l$  gli zeri diventano sempre meno frequenti) gli  $0 \leq z_{n,l} \leq R$  (moltiplicati per  $2l + 1$ , corrispondente al numero di armoniche sferiche associate ad ogni funzione di Bessel) e sommarli per ottenere il numero totale di modi di oscillazione. La densità si può poi ottenere dividendo questo risultato per il volume della sferico della cavità risonante. Questo calcolo, di cui alleghiamo per completezza il programma esecutivo, porta ad una densità pari, nel limite dell'approssimazione numerica, a quella ricavata per la cavità cubica:

$$(79) \quad u(\nu) \sim \frac{4\pi\nu^2}{c^3} + O(\nu).$$

Questa interessante constatazione si inserisce all'interno di un quadro più ampio della fisica matematica. Mark Kac, un noto matematico polacco, aveva infatti proposto una formula che permettesse, note le frequenze  $\nu_1, \dots, \nu_n$  (cioè l'informazione spettrale), di risalire alla forma della cavità sorgente:

$$(80) \quad z(\beta) = \sum e^{-\beta\nu_n} \simeq \frac{\Delta}{2\pi\beta} - \frac{L}{4\sqrt{2\pi\beta}} + (1-r)/E + \dots$$

in cui  $z(\beta)$  rappresenta la funzione di ripartizione,  $A$  l'area della membrana,  $L$  la lunghezza del contorno e  $R$  il numero dei buchi.

Di fronte al problema inverso, ossia risalire ai modi normali a partire dalla forma del corpo, lo scetticismo di Hilbert, il più grande matematico del secolo scorso, riguardo a una possibile risoluzione prima della sua morte non impedì a H. Weyl di cimentarsene: dopo qualche tempo questi riuscì a dimostrare che il numero di modi normali ad alte frequenze è indipendente dalla forma del corpo, confermando il risultato del calcolo prima proposto.

### 3. La Crisi della Fisica Classica e l'ipotesi di quantizzazione

Si è risolto il problema del calcolo dei modi normali di una cavità risonante nel caso tridimensionale per forma cubica e sferica verificando per queste situazioni la Legge di Weyl.

**3.1. Modi Normali Cavità.** Generalizzata al caso n-dimensionale, la formula per il calcolo dei modi di oscillazione per tutto lo spettro di frequenze assume la forma seguente

$$(81) \quad N_{\Omega, \nu \rightarrow \infty} = V(\Omega) \left(\frac{\nu}{c}\right)^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

con  $V(\Omega)$  che indica il volume della cavità.

Una cavità con un piccolo foro all'interno del quale penetra una radiazione che è statisticamente improbabile possa uscire, costituisce una buona approssimazione di corpo nero. Tutta la radiazione entrante è assorbita dalle pareti interne poichè gli elettroni vengono eccitati e oscillano nella direzione del campo elettrico dell'onda. Il comportamento delle particelle segue l'emissione di un dipolo oscillante. Questo porta alla riemissione della radiazione a favore di un altro elettrone la cui intensità massima è in direzione ortogonale all'asse di oscillazione. Il fenomeno si perpetua finchè non si ha assorbimento completo dell'onda iniziale; nel corso del processo si ha un aumento di temperatura. L'adiacenza fra le molecole che costituiscono il corpo nero fa sì che una parte della radiazione assorbita e sia riemessa nell'ambiente esterno dalle pareti esterne.

Sperimentalmente si ha che la densità di energia della radiazione di emissione ha una distribuzione molto simile a quella della radiazione presente all'interno della cavità. Inoltre la radiazione non dipende dalla natura del materiale il che rende il problema di carattere generale. La distribuzione della radiazione interna, quindi, può essere caratterizzata dallo spettro di radiazione emessa. Per determinare la sua forma funzionale, è necessario conoscere l'energia media di un oscillatore eccitato dalla radiazione confinata all'interno della cavità che supponiamo vibri in moto armonico.

**3.2. Calcolo dell'Energia media per oscillatore armonico.** L'Hamiltoniana generale per un oscillatore armonico è della forma del tipo

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{q}^2}{2}$$

Si calcola la funzione di partizione che definisce le proprietà statistiche all'equilibrio termico del sistema per la Hamiltoniana precedente nel caso unidimensionale.

$$z = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \mathcal{H}} dq dp$$

Si separa l'integrale in un prodotto di integrali di due funzioni

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m\omega^2 q^2}{2}} dq$$

nella relazione si può riconoscere l'integrale gaussiano del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Si ottiene così

$$z = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m \omega^2}} = \frac{2\pi}{\beta \omega}$$

L'energia media dell'oscillatore si calcola applicando la nota relazione termodinamica

$$(82) \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log z = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Il risultato rispetta il Teorema di Equipartizione dell'energia poichè il sistema presenta due gradi di libertà: uno traslazionale e uno vibrazionale.

**3.3. Formula di Rayleigh-Jeans.** Si può procedere al calcolo della densità di energia come prodotto tra la densità di stati/modi normali e l'energia media del singolo oscillatore e dividendo per il volume della cavità. L'energia è moltiplicata di un fattore 2 poichè tali sono gli stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica. Si ottiene così la relazione

$$(83) \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

L'espressione prende il nome di Legge di Rayleigh-Jeans. La formula che sarebbe dovuta essere la soluzione al problema della radiazione di Corpo Nero, rivela l'inconsistenza della teoria classica come spiega lo stesso Rayleigh

*"Se essa fosse applicabile a tutte le lunghezze d'onda, l'energia totale di radiazione ad una data temperatura dovrebbe essere infinita."*

il risultato è ricordato con il nome di "Catastrofe Ultravioletta". Catastrofe perchè la formula non è fallimentare solo per il problema fisico in questione, ma ha carattere generale. Infatti è ottenuta per un corpo di qualunque dimensione, forma e materiale. Il termine ultravioletta, invece, indica l'inconsistenza della teoria nel limite per  $\nu \rightarrow \infty$ . La formula stabilisce che, al crescere della frequenza della radiazione elettromagnetica, il corpo nero emetta una quantità di energia infinita, comportamento impossibile oltre che controintuitivo. La conseguenza al risultato è la necessaria messa in discussione delle ipotesi che hanno portato a tale soluzione: la Meccanica Classica o l'Elettromagnetismo.

**3.4. Conseguenze della Legge di Rayleigh-Jeans.** Negli ultimissimi anni del secolo XIX si apre quindi un bivio nella Fisica classica che è costretta a mettere in discussione o Le Equazioni di Maxwell o a rivedere il Teorema di Equipartizione dell'energia per la Meccanica Statistica. L'edificio di Maxwell pareva solido, mentre la Termodinamica presentava altri problema irrisolti, come quello dei Calori Specifici. Riguardo a quest'ultimo, non si era in grado di spiegare i risultati sperimentali con i valori teorici fondati sullo studio dei gradi di libertà per basse temperature. Rayleigh concluse la sua analisi sul corpo nero affermando

*"Mi sembra che si debba ammettere il fallimento della legge di equipartizione in questi casi estremi. Se è così è ovviamente molto importante capirne la ragione."\**

Dal punto di vista sperimentale, la funzione densità di energia ottenuta non è un modello esaustivo per tutti i punti sperimentali. Infatti i risultati sono consistenti con la relazione che indica proporzionalità quadratica tra energia e frequenza solamente a basse frequenze. Le misurazioni mostrano che la funzione teorica è sbagliata perchè nel grafico non è previsto un massimo detto frequenza di picco e un decadimento (che si rivelerà esponenziale) nell'ultima parte.

---

\*RAYLEIGH, The dynamical theory of gases and radiation, trad in Bergamaschini et al., in L'indagine del mondo fisico, Carlo Signorelli Editore, 2001

Una parte della comunità scientifica di Fisici Sperimentali del tempo criticò la soluzione al problema di Rayleigh-Jeans dichiarando falso il grafico della densità di energia oltre un certo valore di "frequenza limite". Si sosteneva infatti che la struttura del materiale risonante, a seguito di un'eccitazione troppo elevata, non fosse in grado di reggere un aumento di temperatura e quindi fosse privo di senso considerare la tendenza a infinito del limite. Tale argomento giustifica che l'integrale non esploda all'infinito, ma è facilmente smontabile poichè la Legge non spiega la presenza di un massimo relativo nella curva sperimentale.

**3.5. A partire da Wien, la giustificazione teorica di Planck.** Mentre si cerca una riformulazione al Principio di Equipartizione, l'unica legge in accordo con i dati sperimentali è formulata da Wien nel 1893 e giustifica la presenza nello spettro di corpo nero di una frequenza di picco e il suo spostamento al variare della temperatura. E' scritta, tuttavia, in una forma tale che necessita una deduzione rigorosa. La Legge dello Spostamento di Wien viene completata nel 1896 con la seguente funzione per la densità energetica

$$(84) \quad u(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-b\nu/T}$$

che delinea il decadimento esponenziale dei dati sperimentali per alte frequenze.

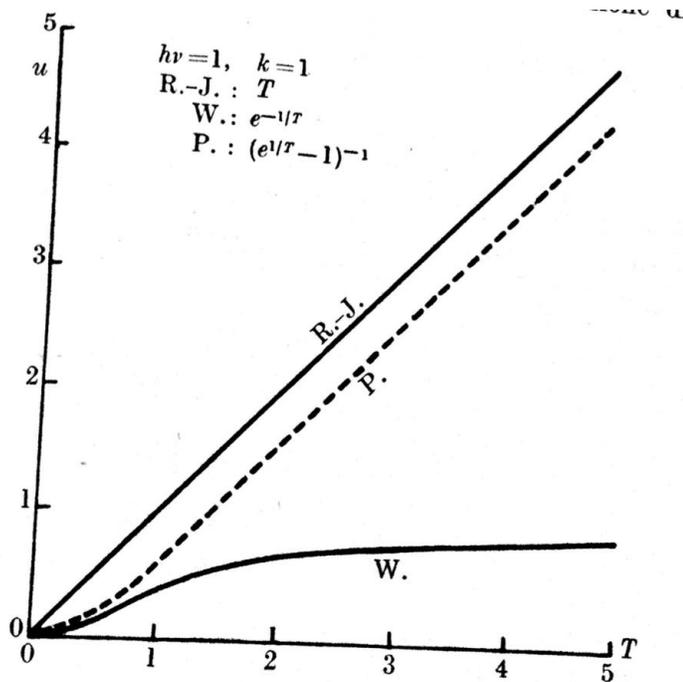


FIGURA 1. Inconsistenza della Formula di Wien

La situazione che il fisico tedesco Max Planck si trova dinanzi è la seguente: due casi limite dati dalle formule (83) e (84) valide per piccoli o grandi valori di  $T$  rispettivamente. In questa sezione ripercorriamo il percorso che porta Planck a ricercare una formula "ponte" giustificabile solamente con l'ipotesi di quantizzazione degli scambi energetici.

Planck comincia osservando che la legge di Wien è consistente con i dati sperimentali perchè considera il fenomeno della radiazione di corpo nero quale *condizione di equilibrio di un processo irreversibile con condizioni iniziali arbitrarie*. Grazie a questa ipotesi di lavoro, Planck studia un sistema formato da una cavità generica costituita da pareti con oscillatori armonici carichi elettricamente (da lui ribattezzati "risonatori"). Essi scambiano energia con la radiazione a una

frequenza propria. Tale modellizzazione del problema fisico si differenzia da quella di Rayleigh e Jeans che considerarono il corpo nero come un semplice sistema di oscillatori.

L'irreversibilità di un processo, stabilita dal 2° Principio della Termodinamica, necessita di introdurre un termine di Entropia per il sistema. Per questo motivo Planck introduce l'ipotesi di "Radiazione naturale", ovvero considera casuale la distribuzione dell'energia di radiazione incidente e fonda la sua analisi sulla grandezza Entropia. La condizione di equilibrio del sistema è caratterizzata da un massimo di entropia.

Basandosi su sole considerazioni elettromagnetiche, Planck ricava una formula che esprime la densità di energia di radiazione nella cavità in funzione dell'energia media di vibrazione del risonatore.

$$(85) \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{U}_\nu$$

In seguito considera il 1° Principio della Termodinamica per una trasformazione a volume costante

$$(86) \quad \frac{\partial S}{\partial \bar{U}} = \frac{1}{T}$$

Necessita, però, di una condizione che leghi l'entropia dei risonatori all'energia vibrazionale.

*N.B.:* Quest'ultima relazione necessaria per ottenere la forma esplicita della funzione  $f(\nu/T)$  della legge di Wien, fu cercata inizialmente da Planck dal punto di vista matematico per interpolazioni successive, senza un'ipotesi fisica di base.

La condizione finale sull'entropia trovata da Planck in grado di correggere il comportamento a basse frequenze della funzione ricavata da Wien stabilisce la seguente dipendenza tra le variabili

$$(87) \quad \frac{d^2 S}{d\bar{U}^2} = \frac{\alpha}{\bar{U}(\beta + \bar{U})}$$

Dal sistema delle tre relazioni, si ricava il modello teorico della distribuzione di energia della radiazione di corpo nero. Giustificati i dati sperimentali dal punto di vista prettamente matematico, manca la deduzione fisica che giunge nell'articolo del 14 Dicembre 1900.

**3.6. L'ipotesi di quantizzazione.** Si consideri la definizione di entropia proposta da Boltzmann

$$S = \text{cost} \log R$$

R indica il numero di stati del sistema denominati "complezioni" da Planck che è necessario calcolare. Si suddividano i risonatori della cavità in gruppi aventi la stessa frequenza. Ognuno di questi gruppi è caratterizzato da una certa energia E ed è costituito da un numero N di risonatori. La distribuzione di energia, se continua, è possibile in un numero infinito di modi.

*Si supponga invece che l'energia sia composta da un numero finito di parti uguali.* Si consideri una costante chiamata  $h$  il cui prodotto con la frequenza ha le dimensioni di un'energia ( $h$  ha quindi le dimensioni di azione).

$$(88) \quad \varepsilon = h\nu$$

Dividendo l'energia E per  $\varepsilon$  si hanno P elementi di energia che devono essere suddivisi per gli N risonatori. Si consideri la parte intera di P, quando il valore non è intero. Considerando indistinguibili gli elementi di energia e distinguibili i risonatori, il numero di complezioni si ottiene così

$$R = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)! P!}$$

Noto R si può calcolare l'entropia e il suo massimo. Per semplificare il calcolo, Planck suppone che tutte le complezioni dei risonatori siano equiprobabili e dividendo per N ottiene l'espressione dell'entropia per il singolo risonatore che soddisfa le condizioni cercate. Quindi Planck giustifica

fisicamente la funzione in questo modo: *l'interazione tra l'oscillatore/risonatore e la radiazione è descritta interamente dalle equazioni di Maxwell, mentre lo scambio di energia tra oscillatori e particelle può avvenire solamente attraverso multipli interi di un quanto di energia  $\varepsilon = h\nu$* . L'ipotesi di quantizzazione è il nucleo della trattazione: è tanto rivoluzionaria da non convincere lo stesso Planck che negli anni successivi tenta di giungere di nuovo allo stesso risultato rinnegando tale ipotesi. "La via, inconsapevolmente aperta da Planck il 14 Dicembre 1900, si era ormai tramutata in una strada maestra".<sup>†</sup>

Con questa nuova ipotesi di lavoro, il valor medio dell'energia di ogni oscillatore si calcola considerando una densità di probabilità discreta

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} \\ &= \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n\varepsilon_0}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n\varepsilon_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \log (1 - e^{-\beta\varepsilon_0}) \\ \implies \langle E \rangle &= \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}\end{aligned}$$

Questo consente di giungere con completezza di ragionamento fisica e analitica alla Formula di Planck per la radiazione di Corpo Nero

$$(89) \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

**3.7. Metodo di Einstein per la deduzione della Formula di Planck.** Circa cinquant'anni dopo, Max Born riporta nel suo scritto *"Filosofia naturale della causalità e del caso"* un metodo utilizzato da Einstein nel 1905 per ricavare nuovamente la Formula di Planck con un'intuizione semplice e geniale.

Partendo dalla formula generale della densità di energia

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} u(\nu, T)$$

si consideri la relazione termodinamica statistica che riguarda le fluttuazioni energetiche

$$(90) \quad \overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = -\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

<sup>†</sup>cit. "La teoria della radiazione di corpo nero: il percorso di Planck" Giuseppe Giuliani, UniPv pp.12

la forma funzionale di  $u(\nu, T)$  è nota grazie alle relazioni di Rayleigh-Jeans e Wien agli estremi del dominio

$$u = \begin{cases} \beta^{-1} & \beta \rightarrow 0 \\ u_0 e^{-\beta \varepsilon_0} & \beta \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ciò implica

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{cases} \beta^{-2} = u^2 & \beta \rightarrow 0 \\ u_0 \varepsilon_0 e^{-\beta \varepsilon_0} = \varepsilon_0 u & \beta \rightarrow \infty \end{cases}$$

Per un noto teorema di statistica le fluttuazioni quadratiche medie dovute a cause indipendenti sono additive. Supponendo che valga la condizione di indipendenza, si ottiene l'equazione differenziale ordinaria

$$(91) \quad \dot{u} = u^2 + \varepsilon_0 u$$

la cui soluzione generale è

$$u = \frac{\varepsilon_0}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_0} - 1}$$

con le condizioni  $\alpha = 0$  per rispettare la legge di Wien e considerando l'ipotesi di quantizzazione si ottiene nuovamente la (89).

**3.8. Conseguenze della Legge di Planck.** Dalla Formula di Planck si deducono le seguenti relazioni

- *La legge dello Spostamento di Wien.* Derivando la densità di energia rispetto alla frequenza e ponendo l'espressione risultante uguale a zero per cercare il massimo di frequenza, si ottiene un'equazione trascendente la cui soluzione è la relazione cercata;
- *La legge di Stefan-Boltzmann.* Si calcola la potenza per unità di superficie integrando la densità di energia su tutto lo spettro di frequenze.

$$(92) \quad \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1} d\nu$$

Sostituendo  $\nu = \frac{kT}{h}x$  si ottiene

$$(93) \quad \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 h^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \triangleleft$$

si deve quindi risolvere l'integrale della forma

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{n-1}}{1 - e^{-x}} dx =$$

il denominatore può essere ricondotto a una serie geometrica in quanto  $e^{-x} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ . Si ottiene

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx$$

L'integrale si risolve con la sostituzione  $\xi = kx$

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx = \int_0^\infty e^{-\xi} \frac{\xi^{n-1}}{k^n} d\xi = \frac{\Gamma(n)}{k^n} = (n-1)! k^{-n}$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene una serie la cui ragione è la funzione  $\zeta(k)$  di Riemann con  $n = 4$

$$(n-1)! \sum k^{-n} = \pi^4/15$$

Nel processo di integrazione, il calcolo del flusso determina un la presenza nel risultato di del fattore  $c/4$ ; vediamo perchè. Si consideri una cavità con un piccolo orifizio di superficie unitaria inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo  $\theta$ . Il flusso lungo la superficie tramite si calcola tramite definizione

$$\Phi = \int c \, dt \, A \, \cos \theta = \int c \, dt \, \cos \theta$$

Si integra a questo punto lungo tutta la superficie per unità di angolo solido passando a coordinate sferiche supponendo.

$$\iint \Phi = \iint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, \cos \theta \, c \, dt \, d\theta \sim c/2$$

L'integrale considera il flusso passante in entrambe le direzioni per la superficie. Il risultato corretto, quindi è diviso per 2.

▷ Mettendo tutto assieme nell'equazione [11] si ricava

$$(94) \quad P = \frac{c}{4} * \frac{k_b^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} * \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_b^4}{c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4$$

La costante di Planck diviene una delle costanti fondamentali della natura e indica l'unità fondamentale della grandezza azione=[E \* t]. Compare, infatti, oltre che nella Legge di Stefan-Boltzmann, nei livelli energetici dell'atomo di Bohr.

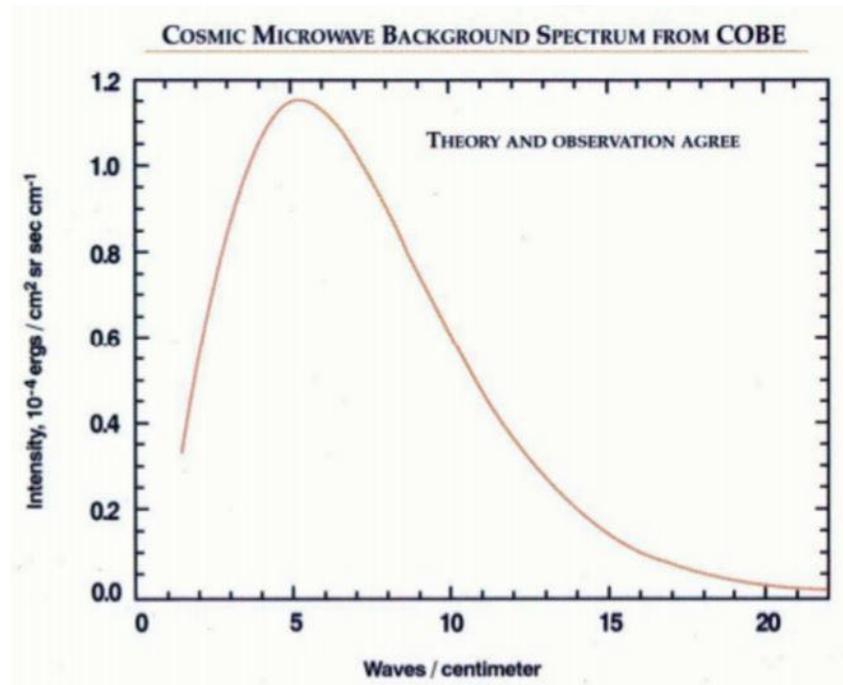
*Esercizio:* Nota la Legge di Stefan-Boltzmann, calcolare la potenza di emissione di un tostapane ☺

#### 4. CMBR: Cosmic Microwave Background Radiation

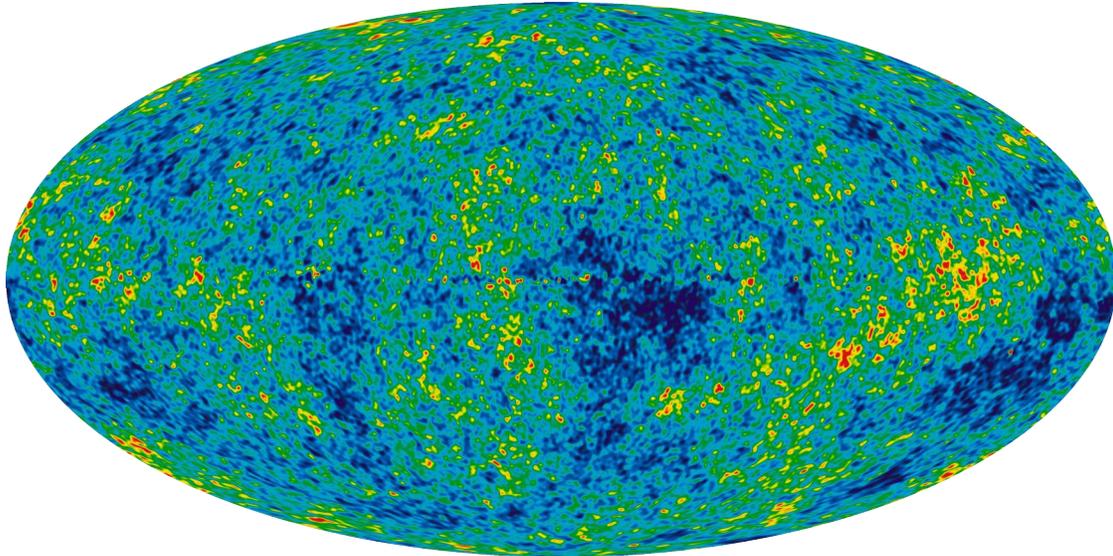
Secondo le attuali teorie cosmologiche il nostro universo deriva da un'esplosione primordiale, detta Big Bang. Si suppone che la palla di fuoco originale abbia irraggiato una grande quantità di radiazione di corpo nero, radiazione che corrispondeva ad una temperatura elevatissima. La successiva espansione dell'universo ha prodotto un aumento di lunghezza d'onda in questa luce fossile, che corrisponde dunque ad un corpo nero a temperatura molto più bassa. Questa luce fossile è stata scoperta nel 1965 da Arno Penzias e Robert Wilson, nel corso di osservazioni radioastronomiche con un'antenna a basso rumore: i due ricercatori capirono che il rumore di fondo che osservavano aveva un'origine fisica, e identificarono così la radiazione cosmica di fondo, che è una reliquia del Big Bang.

La loro scoperta ha avuto un'enorme importanza in astrofisica, e Penzias e Wilson hanno ricevuto per questo il premio Nobel nel 1978.

Dopo i loro studi, ne sono stati condotti molti altri, ad un livello di precisione molto più elevato. Tra i progetti recenti vale la pena di menzionare il satellite COBE, che utilizzando degli strumenti ad alta precisione ha prodotto la prima misurazione dello spettro della radiazione cosmica di fondo al di fuori dell'atmosfera. Il satellite è stato lanciato nel 1989 e in pochi giorni è stato in grado di ottenere uno spettro della radiazione cosmica di fondo praticamente indistinguibile da uno spettro di corpo nero, alla temperatura  $T = 2.726$  K.



Come si è visto lo spettro di corpo nero è identificato in modo univoco da una temperatura, quindi da una misura dello spettro si può ricavare la temperatura. Gli strumenti di bordo di COBE hanno in questo modo ottenuto una mappa della temperatura del cielo: questa temperatura non è uniforme, in parte perché la Terra si muove rispetto al fondo di radiazione cosmica (e quindi lo spettro viene modificato a causa dell'effetto Doppler), in parte a causa di fluttuazioni di origine ignota, che rappresentano un'importante vincolo per i modelli cosmologici attuali.



## Elementi di Relatività speciale

All'inizio dell'800, l'esperimento di Young confermò l'interpretazione ondulatoria della luce. Young aveva mostrato che un fascio di luce che incide su una superficie dotata di due fenditure crea delle *frange d'interferenza* del tutto analoghe a quelle prodotte da due sorgenti sonore che emettono un suono o da due sassi che, cadendo in uno stagno, provocano un disturbo sulla superficie dell'acqua. Tutti gli esempi di onde noti prima della luce si propagano in un mezzo, detto *mezzo*

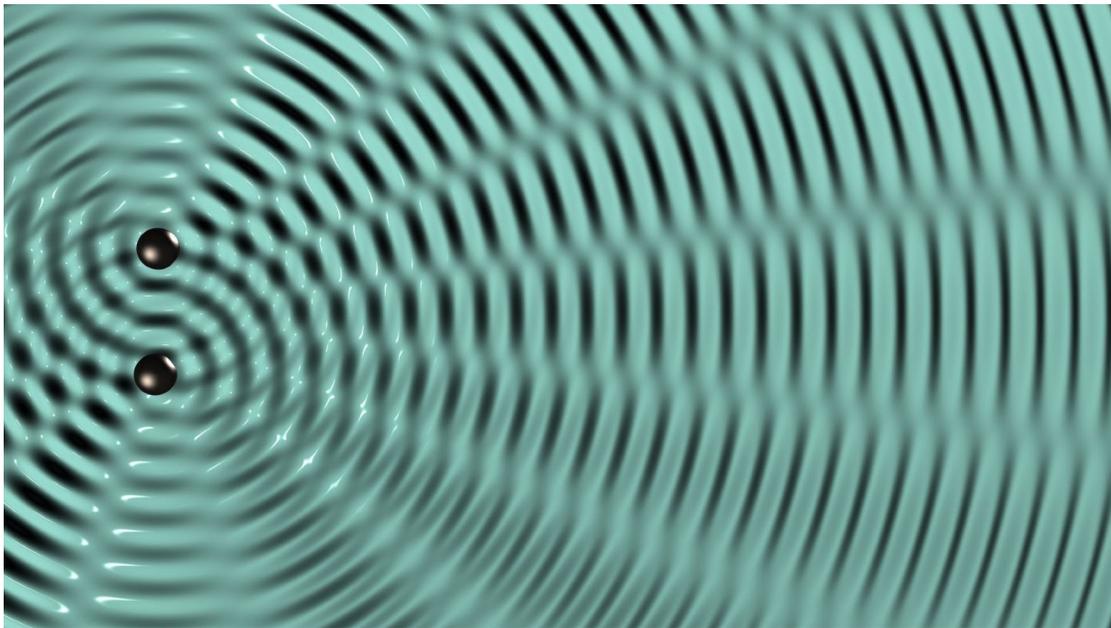


FIGURA 1. Interferenza tra due sorgenti puntiformi.

*materiale*, poiché non sono altro che il disturbo di qualche grandezza che caratterizza il mezzo. Come è possibile allora che la luce, pur essendo un'onda, sia in grado di muoversi nel vuoto? Agli occhi dei fisici del XIX secolo appariva evidente che dovesse esistere un qualche mezzo che permettesse la propagazione della luce. Per questa ragione nacque la teoria dell'*etere luminifero*. Secondo questa teoria esiste un mezzo che permea tutto lo spazio e che gioca lo stesso ruolo di quello che chiamiamo mezzo materiale per le onde classiche.

### 1. L'esperimento di Fizeau

Le due principali teorie riguardanti l'interazione dell'etere con la materia si dovevano ad Augustin-Jean Fresnel e George Gabriel Stokes. Secondo quest'ultimo, l'etere veniva *completamente trascinato* (1844) da oggetti in moto rispetto ad esso, mentre Fresnel aveva precedentemente proposto un *trascinamento parziale* (1818), determinato dal coefficiente di trascinamento  $(1 - \frac{1}{n^2})$ , con  $n$  indice di rifrazione del mezzo. Nel 1851, Hippolyte Fizeau realizzò un esperimento

con l'intento di misurare l'effettiva variazione della velocità della luce quando questa si propagasse attraverso un mezzo in moto, presupponendo che questo trascinasse *completamente* l'etere.

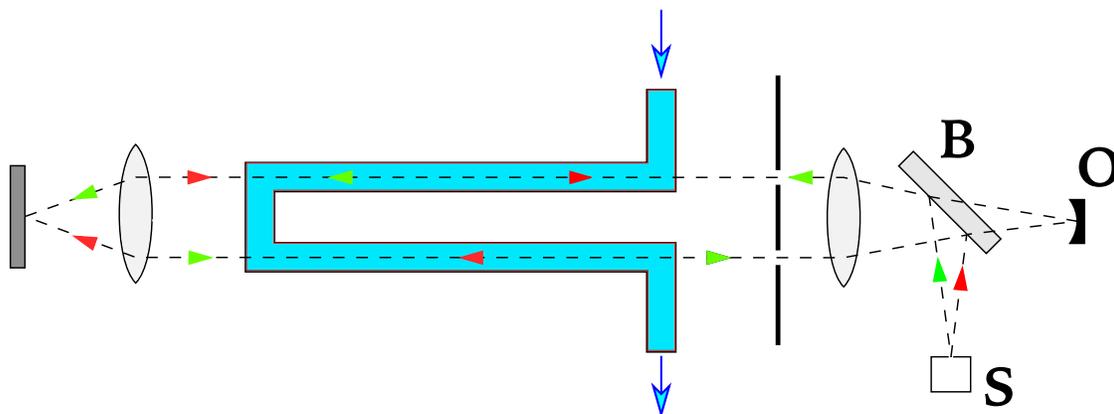


FIGURA 2. Schema dell'apparato utilizzato da Fizeau

**1.1. L'esperimento.** La luce prodotta dalla sorgente  $S$  viene introdotta nell'apparato dallo specchio semiriflettente  $B$  e resa coesa dalla lente antistante. Due fasci vengono selezionati dallo schermo opaco e si propagano attraverso l'acqua in scorrimento fino all'estremo opposto, dove una lente ed uno specchio "scambiano" i fasci, facendo ad ognuno percorrere la direzione precedentemente percorsa dall'altro. In questo modo, un fascio percorre due volte il tragitto muovendosi nello stesso verso dell'acqua, mentre l'altro sempre in verso opposto. I due fasci vengono poi concentrati nel punto d'osservazione  $O$  dove si può osservare l'interferenza dei due fasci. Studiando la figura prodotta si può risalire alla velocità relativa dei due fasci.

**1.2. Previsione e delusione.** Fizeau si aspettava con quest'esperimento di validare l'ipotesi del trascinamento totale proposta da Stokes. Questo significa che, indicata con  $c_+$  la velocità del fascio che viaggiava nello stesso verso dell'acqua e con  $c_-$  quella dell'altro fascio, si prevedeva di osservare

$$c_+ = \frac{c}{n} + v$$

$$c_- = \frac{c}{n} - v$$

con  $n$  indice di rifrazione dell'acqua e  $v$  la sua velocità. Fu per Fizeau una grande sorpresa scoprire che la velocità dell'acqua era scalata di un fattore  $(1 - \frac{1}{n^2})$ , come previsto dall'ipotesi di Fresnel. Questo risultato fu accolto con scetticismo dalla comunità scientifica, ma l'esperimento fu raffinato e ripetuto più volte, confermando la misura di Fizeau. Verrà mostrata l'origine relativistica di questo effetto nel paragrafo 5.4.

## 2. La luce come onda elettromagnetica

Il risultato più eclatante delle equazioni di Maxwell fu la comprensione di che cosa *costituisce* la luce. Prima dell'avvento della teoria di Maxwell, sebbene fossero note le sue proprietà ondulatorie, si pensava che la luce fosse un fenomeno distinto da qualunque altro fenomeno fisico già descritto. Le equazioni di Maxwell nel vuoto, senza la presenza di cariche o correnti, sono

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Nel 1862 Maxwell si accorse che se si applica l'operazione di rotore alle due equazioni che già lo contengono, sfruttando l'identità  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla^2 \mathbf{A}^*$  si giunge alla seguente coppia di equazioni

$$(95) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

In realtà si tratta di una sola equazione che è valida sia quando l'argomento è il campo elettrico, sia quando è il campo magnetico. Questa equazione è formalmente identica all'equazione di d'Alembert, che descrive il moto di un'onda che si propaga in un mezzo materiale.

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Le onde descritte dall'equazione (95) sono sostanzialmente differenti da ogni tipo di onda conosciuto fino ad allora. Esse infatti sono *onde vettoriali*. La (95) è soddisfatta da funzioni del tipo  $\mathbf{F}(\mathbf{x} \pm \mathbf{v}t)$ , le quali descrivono campi vettoriali che traslano in una certa direzione  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  con velocità  $v = \|\mathbf{v}\|$ .

In ogni punto del campo vettoriale i due vettori che rappresentano il campo elettrico ed il campo magnetico sono ortogonali tra loro, e insieme a  $\mathbf{v}$  formano una cosiddetta terna destrorsa. La soluzione più generale dell'equazione è data da una combinazione lineare di funzioni come quelle appena descritte, in quanto gode della proprietà di linearità.

L'indizio più importante del fatto che queste equazioni descrivessero la luce è proprio la velocità con cui queste onde si propagano. Se uguagliamo i due coefficienti presenti nelle equazione trovata da Maxwell e nell'equazione di d'Alembert, si scopre immediatamente che la velocità con cui le onde elettromagnetiche si propagano è  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , che è molto vicina al valore della velocità della luce già misurata prima di Maxwell! La teoria di Maxwell ricevette in seguito numerose conferme sperimentali, a iniziare dall'esperimento di Hertz. Hertz osservò che producendo delle scariche elettriche tra due manopole, in una spira vicina si misurava una corrente, che doveva essere causata dal campo magnetico dell'onda elettromagnetica generata dalla scarica.

In realtà, come si vedrà più avanti, se la teoria dell'etere dovesse rivelarsi corretta, un osservatore sulla Terra non dovrebbe misurare esattamente la velocità prevista dalle equazioni di Maxwell, ma soprattutto, non dovrebbe misurare un valore costante nel tempo. Tuttavia la scoperta di Maxwell rimane una rivoluzione di grande portata nella fisica classica. Era ragionevole pensare che la differenza tra la velocità prevista da Maxwell e quella misurata sulla Terra era contenuta nell'incertezza della misura.

### 3. L'incompatibilità tra elettromagnetismo e meccanica classica

Il notevole risultato di Maxwell aprì una serie di problemi che misero in difficoltà i fisici fino a quando Einstein formulò nel 1905 la teoria della relatività speciale. L'equazione delle onde (95) fissa in termini teorici un valore ben preciso per la velocità della luce. Se supponiamo che tale equazione risulti valida in un certo sistema di riferimento inerziale  $S$ , cosa succede in un secondo sistema di riferimento  $S'$  con velocità relativa  $\mathbf{v}$  rispetto al primo? Per semplicità studiamo il

---

\*Il laplaciano che compare al primo membro è detto *laplaciano vettore*, e in coordinate cartesiane è semplicemente l'operatore laplaciano applicato alle componenti del vettore.

campo elettrico di un'onda che varia solo lungo la direzione  $x$ . L'equazione che descrive questa onda si riduce a

$$(96) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, t)}{\partial t^2}$$

Assumiamo che gli assi dei due sistemi di riferimento di riferimento coincidano al tempo  $t = 0$  e che  $S'$  si muova con velocità relativa  $v$  lungo l'asse  $x$  di  $S$ . Le equazioni che trasformano le coordinate di un punto nel sistema  $S$  in quelle del sistema  $S'$  sono

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Per trovare l'equazione (96) nel nuovo sistema di riferimento bisogna ottenere la relazione tra le derivate parziali per i due sistemi di coordinate. Il campo elettrico può essere espresso in funzione delle coordinate di  $S'$ , che a loro volta dipendono da quelle di  $S$ , cioè  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x'(x, t), t'(t))$ . Allora calcolando le derivate parziali si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}(x', t')}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'} \\ \frac{\partial \mathbf{E}(x', t')}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} = \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \mathbf{E} \end{aligned}$$

Le derivate parziale seconde sono dunque

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \mathbf{E} \right] = \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \mathbf{E}$$

Sostituendo queste relazioni nella (96) si evince che l'equazione delle onde elettromagnetiche cambia totalmente aspetto nel nuovo sistema di riferimento.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \mathbf{E} &= \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2} \\ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x' \partial t'} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t'^2} \end{aligned}$$

Di questa invarianza se ne era accorto anche il giovane Einstein. Egli immaginava di trovarsi in un sistema di riferimento solidale al moto di un fascio di luce. Da questo punto di vista un osservatore vedrebbe campi magnetici ed elettrici immobili senza che vi siano cariche o correnti a generarli, e questo è incompatibile con l'equazione (95), la quale prevede che le onde elettromagnetiche si propaghino sempre alla velocità della luce. Esattamente come accade per l'equazione di d'Alembert, che descrive il moto di un'onda nel sistema di riferimento in cui il mezzo materiale si trova in stato di quiete, i sostenitori della teoria dell'etere credevano che le equazioni di Maxwell fossero valide esclusivamente nel sistema di riferimento solidale con l'etere.

Se questa teoria si rivelasse corretta ne conseguirebbe che i fenomeni meccanici ed elettromagnetici seguano principi totalmente opposti. Come già Galileo aveva intuito, per le leggi della meccanica non esiste un sistema di riferimento assoluto, ma esse rimangono valide in ogni sistema di riferimento inerziale. Chiedersi se è un sistema di riferimento a muoversi rispetto ad un altro o viceversa è una domanda priva di significato fisico. Nel caso dell'elettromagnetismo invece vi

sarebbe un solo sistema di riferimento in cui le onde si comportano come previsto dalla (95), e questo rende il sistema di riferimento solidale con l'etere un sistema di riferimento assoluto.

La conseguenza più ovvia, e anche la più facile da verificare, di trovarsi in un sistema di riferimento *non* solidale con l'etere è la dipendenza della velocità della luce dalla direzione in cui si propaga. Il nostro sistema di riferimento sulla Terra è senza ombra di dubbio non inerziale, poiché la Terra ruota attorno al proprio asse e orbita attorno al Sole, che a sua volta ruota attorno al centro della galassia. La possibilità che l'etere segua la Terra in questo moto è fuori discussione. Rimane ancora in piedi la teoria di Fresnel, ma che prevede ad ogni modo un trascinamento parziale dell'etere, quindi gli effetti del nostro moto rispetto all'etere dovrebbero essere ancora misurabili. Come già anticipato, la velocità della luce che compare nell'equazione (95) è compresa nell'intervallo di incertezza delle misure già effettuate sulla velocità della luce. L'effetto sulla velocità della luce previsto dalla teoria dell'etere non doveva superare dunque l'intervallo di incertezza della misura affinché la previsione della teoria fosse corretta.

#### 4. Esperimento di Michelson e Morley

Dopo la conferma sperimentale dell'ipotesi di Fresnel, ottenuta da Fizeau, cominciò la caccia all'evidenza di altre proprietà previste per l'etere e non ancora osservate. Nel 1886 Albert A. Michelson e Edward W. Morley realizzarono una versione migliorata dell'esperimento di Fizeau, confermarono il risultato da lui ottenuto, e si concentrarono immediatamente nella realizzazione di un'altra misura, ben più accurata, che avrebbe permesso di misurare il *vento d'etere*. Supposta infatti l'esistenza di un etere quasi statico, era logico pensare che due fasci di luce in moto ortogonalmente uno rispetto all'altro percorressero la stessa distanza in due tempi diversi, esclusi fortuiti ed improbabili allineamenti del sistema. Misurata questa differenza sarebbe stato facile risalire alla velocità con cui la terra viaggiava nell'etere.

**4.1. In the basement.** Un fascio di luce bianca era prodotto dalla sorgente *a* e veniva separato in due fasci ortogonali dal beam splitter *b*. L'elemento *c* era semplicemente una lastra di vetro necessaria per compensare la differenza di distanza percorsa dai due fasci all'interno del vetro. Una serie di riflessioni sui quattro gruppi di specchi riportavano i fasci, che avevano coperto una distanza di circa 11m, sul beam splitter che li ricongiungeva e direzionava sull'ottica di osservazione *f*. Lo specchio mobile *e'* permetteva una calibrazione fine della distanza percorsa. La strumentazione richiedeva un allineamento estremamente delicato ed ogni movimento non previsto avrebbe potuto comportare significativi errori di misura. Per questo motivo Michelson e Morley decisero di posizionare il loro esperimento nel piano seminterrato di un dormitorio, che aveva inoltre il vantaggio di impedire brusche variazioni di temperatura. Lo strumento fu montato su una massiccia base in pietra arenaria, posta a galleggiare in una vasca di mercurio circolare. Questa particolare configurazione permetteva di ruotare il sistema con estrema facilità e le vibrazioni introdotte venivano velocemente assorbite dal mercurio.

**4.2. Previsione teorica.** Ipotizziamo che il sistema sia allineato in modo che un fascio si muova su una direzione perfettamente parallela a quella del vento d'etere, così l'altro fascio vi sarà sempre perpendicolare. Il fascio parallelo colpirà il beam splitter al tempo  $T = 0$  e si dirigerà verso lo specchio, anch'esso in moto a velocità  $v$  rispetto all'etere. Dunque quando il fascio avrà percorso la distanza  $L = cT_1$  che separa il beam splitter dallo specchio, quest'ultimo si sarà allontanato di  $vT_1$ . Imponendo che le due distanze siano uguali si ottiene

$$vT_1 = L + cT_1$$

$$T_1 = \frac{L}{c - v}$$

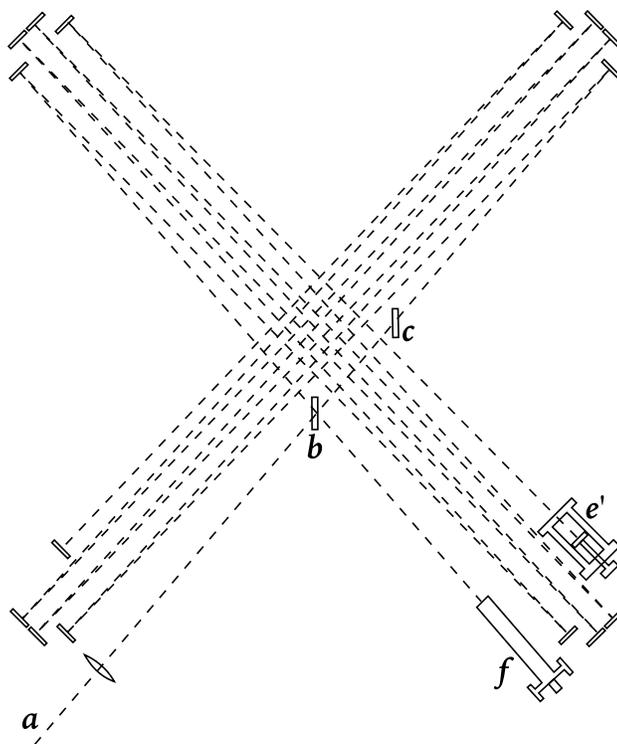


FIGURA 3. Schema dell'apparato sperimentale utilizzato da Michelson e Morley

Lo stesso ragionamento può essere compiuto per il viaggio di ritorno, con l'unica differenza che la velocità avrà verso opposto. Pertanto il tempo totale di percorrenza del fascio parallelo sarà

$$(97) \quad T_p = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} \approx \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Per quanto riguarda il fascio ortogonale si può compiere un ragionamento analogo, tenendo conto che il percorso *reale* del fascio sarà diagonale, pertanto la distanza totale percorsa è  $\sqrt{L^2 + (vT_2)^2}$ . Si può dunque porre l'uguaglianza

$$cT_2 = \sqrt{L^2 + (vT_2)^2}$$

$$T_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

e ricavare un tempo totale di percorrenza per il fascio ortogonale  $T_o$  pari a

$$(98) \quad T_o = 2T_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

La differenza di tempo  $\Delta t$  impiegata dai due fasci per completare il percorso è

$$(99) \quad \Delta T = T_p - T_o = \frac{2L}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

che corrisponde ad una differenza di distanza pari a  $\Delta l = c\Delta T$ . Se il sistema viene poi ruotato di 90 gradi, allora il ruolo dei due fasci sarà invertito e la differenza di distanza percorsa diventa

$\Delta_2 = c(-\Delta T)$ . Queste due distanze corrispondono allo sfasamento longitudinale con cui i due fasci raggiungono lo schermo del rivelatore. Dividendo la loro differenza per la lunghezza d'onda utilizzata si può ricavare la traslazione prevista per le frange, dopo la rotazione del sistema.

$$(100) \quad \Delta n = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\lambda} = \frac{4L}{\lambda} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

che sviluppando in serie diviene

$$(101) \quad \Delta n \approx \frac{2Lv^2}{\lambda c^2}$$

Considerando che Michelson e Morley hanno utilizzato luce bianca, si può prendere un valore mediano per la lunghezza d'onda  $\lambda \approx 500\mu\text{m}$ . La lunghezza del percorso era  $L \approx 11\text{m}$  e la velocità con cui la Terra orbita intorno al Sole è  $v \approx 3 \times 10^4\text{m/s}$ . Sostituendo, si ottiene  $\Delta n \approx 0.44$ , ed è un valore di questo ordine di grandezza che ci si aspettava di misurare, anche nel caso incredibilmente sfortunato in cui l'etere fosse in quiete rispetto al Sole.

L'esperimento non diede i risultati attesi. Il *vento d'etere* provocò una traslazione massima delle frange pari a  $\Delta n_M \approx 0.02$ , rientrando peraltro nell'errore sperimentale, come ammesso da Michelson stesso. Su questo fallimento, che spinse i fisici ad accantonare l'idea dell'etere, Einstein fondò l'ipotesi della velocità della luce come costante universale.

## 5. Il “Principio di Relatività”

La domanda rimase aperta per diversi anni, fino al 1905, l'anno in cui A. Einstein pubblicò il suo primo articolo sulla teoria della relatività speciale. La teoria prende il nome dal principio di relatività, che non era certamente un'idea nuova nel campo della fisica. Il principio afferma che ogni legge della fisica deve rimanere valida in qualunque sistema di riferimento inerziale. Il secondo postulato della relatività afferma che la velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale. Quest'ultima assunzione porta a modifiche della nostra concezione di spazio e tempo davvero notevoli.

Esiste un semplice esperimento mentale che può dare una prova immediata della portata di tali assunzioni. Immaginiamo un treno che si muove con velocità  $v$  rispetto ad una stazione. Al centro vi è una lampada, e in ciascuno degli estremi del treno è presente un passeggero. Ad un certo istante la lampada si accende. Dato che i due passeggeri si trovano alla stessa distanza dalla lampada e la velocità della luce è costante in entrambe le direzioni, i due passeggeri vedranno il fascio di luce arrivare nello stesso istante. Alla stazione invece si trova una terza persona. Ammettendo che quello che succede sul treno si possa vedere anche dall'esterno, il terzo osservatore vedrà i due fasci muoversi in versi opposti alla stessa velocità, in accordo con le nostre ipotesi. Dal punto di vista del terzo osservatore, il passeggero che si trova in coda al treno si muove verso il fascio che lo sta raggiungendo, mentre il passeggero che siede vicino alla locomotiva si sta allontanando dal fascio che si muove nel suo verso. Ma se è vero che la luce si muove alla stessa velocità anche per la persona che si trova ferma alla stazione, allora questa vedrà che la luce raggiunge i due passeggeri in due istanti diversi! Non si tratta di una sorta di effetto *apparente* dovuto al moto del treno, come può essere la forza che si sperimenta in un sistema di riferimento non inerziale, ma con l'introduzione della relatività il tempo cessa di essere una grandezza assoluta, e due osservatori che si trovano in sistemi di riferimento differenti non concordano sull'intervallo temporale tra due eventi, esattamente come accade per la velocità di un corpo.

**5.1. Le nuove trasformazioni.** Giunti a questo punto, è evidente la necessità di trovare un nuovo sistema di trasformazioni che esprimono le coordinate di sistema di riferimento  $S$  in

funzione di quelle di un secondo  $S'$ . Le trasformazioni della relatività emergono naturalmente dagli assiomi mostrati nel paragrafo precedente.

Per semplicità, consideriamo due sistemi di riferimento che al tempo  $t = 0$  coincidono, e tali per cui l'origine di  $S'$  si muove con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$  di  $S$ .

Una terzo postulato implicito è il principio di inerzia. Infatti, per quanto diverse le nuove trasformazioni possano essere, un corpo non soggetto a forze osservato da un qualunque sistema di riferimento inerziale deve sempre muoversi a velocità costante (che può essere anche nulla). Le uniche trasformazioni che preservano questa proprietà sono quelle lineari, cioè

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

Gli assi  $y'$  e  $z'$  devono rimanere paralleli agli assi  $y$  e  $z$  ad ogni istante, quindi le equazioni si riducono a  $y' = a_{22}y$  e  $z' = a_{33}z$ . Dal punto di vista del sistema  $S'$  la situazione è pressoché simmetrica. L'unica differenza è che un osservatore solidale con  $S'$  vede l'origine del sistema  $S$  muoversi con velocità  $-v$  lungo l'asse  $x'$ . Le trasformazioni degli assi  $y$  e  $z$  devono essere dunque le stesse quando si passa dalle coordinate di  $S'$  a quelle di  $S$ . Gli unici valori di  $a_{22}$  e  $a_{33}$  che soddisfano le condizioni sono 1 e -1, ma l'unico valore sensato è uguale a 1 per entrambi (con -1 uno si avrebbe una riflessione). Una seconda restrizione che possiamo applicare riguarda gli assi  $x$  e  $x'$ . Quando  $x = vt$ , l'asse  $x'$  è sempre 0, poiché al tempo  $t = 0$  coincidono. Inoltre anche  $x'$  rimane sempre parallelo a  $x$ , quindi anche qui la dipendenza da  $y$  e  $z$  sparisce. Applicando tali condizioni si trova che  $a_{14} = -a_{11}vt$ . Sostituendo nel sistema, la trasformazione per la coordinata  $x'$  diventa

$$x' = a_{11}(x - vt)$$

Siccome non è più necessario mantenere la notazione dei coefficienti con gli indici, definiamo  $\gamma \equiv a_{11}$ . Giunti a questo punto, è il momento di applicare l'ipotesi più importante, ovvero al costanza della velocità della luce. Immaginiamo che vi sia un raggio di luce che parte, sempre al tempo  $t = 0$ , dall'origine di  $S$  (che come già sappiamo, all'inizio coincide con quella di  $S'$ ) e si muove lungo l'asse  $x$ . Il raggio deve muoversi a velocità  $c$  anche nel sistema di riferimento  $S'$ . Abbiamo allora una nuova equazione che deve essere soddisfatta

$$x' = \gamma(ct - vt) = ct'$$

L'uguaglianza è valida anche quando si passa dalle coordinate di  $S'$  a quelle di  $S$  (ricordiamo che, visto da  $S'$ ,  $S$  si muove con velocità  $-v$ ), quindi

$$x = \gamma(ct' + vt') = ct$$

Dalle due equazioni si deduce che

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Per terminare, bisogna trovare la trasformazione del tempo  $t'$ . Dal momento che conosciamo  $\gamma$ , possiamo considerare le trasformazioni per  $x$  e  $x'$

$$(102) \quad x' = \gamma(x - vt) \quad x = \gamma(x' + vt')$$

e risolvere, isolando  $t'$ . Procedendo in questo modo si ottiene

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Riassumendo le nuove trasformazioni sono

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Queste trasformazioni, per ragioni storiche, prendono il nome di *trasformazioni di Lorentz*. Lorentz infatti trovò le stesse equazioni mentre cercava una trasformazione che mantenesse intatte le equazioni di Maxwell in diversi sistemi di riferimento.

**5.2. Dilatazione dei tempi.** Con le trasformazioni di Lorentz, possiamo trovare una relazione esatta tra lo scorrere del tempo in due diversi sistemi di riferimento. Consideriamo gli stessi sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  del paragrafo precedente. Questa volta sono presenti due diversi orologi, il primo dei quali si trova nell'origine di  $S$  e il secondo in quella di  $S'$ . Gli orologi sono costruiti in modo da muovere una lancetta a intervalli di tempo costanti  $\Delta t$ , e al tempo  $t = 0$  sono sincronizzati sullo stesso orario. La trasformazione che restituisce il tempo trascorso in  $S'$  in funzione di quello trascorso in  $S$  è la seguente:

$$(103) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Ci interessa trovare la relazione che intercorre tra l'intervallo di tempo che trascorre tra spostamenti successivi della lancetta dell'orologio di  $S$  e l'analogo intervallo per l'orologio di  $S'$ . Chiamiamo questi istanti  $t_1$  e  $t_2$  per il sistema  $S$ . Le corrispondenti posizioni sull'asse  $x$  dell'origine di  $S'$  sono  $x_1$  e  $x_2$ . Dalla (103) otteniamo

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}\right)$$

Ma la velocità di  $S'$  rispetto a  $S$  è  $v$ , quindi  $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = v\Delta t$ . La trasformazione diventa

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v^2}{c^2}\Delta t\right) = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t = \frac{\gamma}{\gamma^2}\Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Dato che  $\gamma$  è sempre minore di 1, l'intervallo  $\Delta t'$  scandito dall'orologio in  $S'$  risulta essere *maggiore* di un fattore  $\frac{1}{\gamma}$ . Questa proprietà può essere generalizzata a qualunque evento, quindi si può affermare che, dal punto di vista del sistema  $S$ , il tempo sembrerà trascorrere più lentamente in  $S'$ . Si potrebbe erroneamente credere che un osservatore solidale con  $S'$  veda gli eventi accadere più rapidamente rispetto ad un osservatore solidale con  $S$ . Questa idea è completamente errata, poichè violerebbe in primo luogo il principio di relatività. Come avevamo già osservato precedentemente, possiamo seguire lo stesso procedimento scambiando  $S'$  con  $S$  e giungeremmo allo stesso risultato, cioè  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}$ . Quindi anche da  $S'$  il tempo che sembra trascorrere più lentamente in  $S$ . Ma come è possibile? La risposta sta nella nostra concezione errata del tempo. Ci pare ovvio che due osservatori solidali a sistemi di riferimento che hanno velocità relativa non nulla non concordino sulla velocità che uno misura dell'altro. La stessa identica cosa avviene per il tempo.

**5.3. Contrazione delle distanze.** Le trasformazioni di Lorentz non interessano solo i tempi, ma anche le distanze, seppur in maniera diversa. Torniamo ancora ai soliti sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ . Al posto degli orologi, ora vi sono due asticelle identiche, di lunghezza  $L$  e parallele all'asse  $x$ . Ciascuna ha un estremo nell'origine di uno dei due sistemi. Più precisamente, le coordinate degli estremi della prima asticella sugli assi  $(x, t)$  sono  $(0, t)$  e  $(L, t)$ , mentre per la seconda sono

$(vt, t')$  e  $(vt + L', t')$ . Ora cerchiamo di esprimere le coordinate dell'asticella che si trova in  $S'$  in funzione delle coordinate di  $S$ , sempre mediante le trasformazioni di Lorentz

$$x'_2 - x'_1 = L' + vt - vt = L' = \gamma(x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)) = \gamma L$$

Se ne deduce che, vista da  $S$ , l'asticella solidale con  $S'$  è più corta di un fattore  $\gamma$ . Questa proprietà è valida per la componente  $x$  della distanza tra due punti qualunque<sup>†</sup> che si muovono solidalmente a  $S'$ . Per due sistemi di riferimento che hanno una velocità relativa  $\mathbf{v}$ , la contrazione avverrà nella direzione di  $\mathbf{v}$ .

**5.4. Composizione delle velocità.** Tra le questioni ancora in sospeso della nuova cinematica, è presente la composizione delle velocità. Generalmente ci si riferisce allo stesso concetto con *addizione* delle velocità, perché nel contesto della cinematica galileiana sappiamo che se un corpo  $C'$  si muove con velocità  $\mathbf{v}'$  rispetto ad un secondo corpo  $C$ , a sua volta in moto con velocità  $\mathbf{v}$  rispetto ad un osservatore (assumiamo che il sistema di riferimento dell'osservatore sia inerziale e le velocità siano costanti), allora la velocità di  $C'$  misurata dall'osservatore sarà  $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ . Tuttavia questa relazione non può rimanere valida nella cinematica relativistica, perché se ciò fosse vero, il modulo del vettore  $\mathbf{V}$  potrebbe risultare maggiore di  $c$ ! Immaginiamo che un'astronave si muova all'eccezionale velocità di  $v = 0.5c$  rispetto al pianeta da cui è decollata (supponiamo anche che il sistema di riferimento del pianeta sia inerziale). All'interno dell'astronave si trova un tubo catodico che accelera un'elettrone ad una velocità  $u' = 0.6c$  nella stessa direzione del moto dell'astronave (possiamo quindi studiare questo sistema come se fosse monodimensionale). La coordinata dell'elettrone nel sistema dell'astronave è banalmente  $x' = u't'$ . Per trovare la velocità dell'elettrone rispetto al pianeta  $u = \frac{x}{t}$  dobbiamo impiegare nuovamente le trasformazioni di Lorentz. Quindi troviamo

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})}$$

Raccogliendo  $t'$  sia a numeratore che a denominatore risulta

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Si può verificare che per qualunque valore di  $u'$  e  $v$  minori o uguali a  $c$  la velocità  $u$  risulta essere minore o uguale a  $c$ .

**L'osservazione di Fizeau.** A partire dalla legge di composizione delle velocità segue che la velocità della luce nell'acqua  $c_{aq}$ , che si muove nello stesso verso della luce, misurata nel sistema di riferimento del laboratorio è data da

$$c_{aq} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{\frac{c}{n}v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}}$$

Se si considera  $v \ll c$  si può approssimare la differenza tra la velocità della luce nell'acqua in moto e quella in acqua ferma  $\frac{c}{n}$  con

$$c_{aq} - \frac{c}{n} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}} - \frac{c}{n} = \frac{\frac{c}{n} + v - \frac{c}{n}(1 + \frac{v}{cn})}{1 + \frac{v}{cn}} = \frac{v(1 - \frac{1}{n^2})}{1 + \frac{v}{cn}} \approx v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

come previsto dall'ipotesi di Fresnel e verificato sperimentalmente da Fizeau. Questo dimostra che il valore misurato era corretto, mentre era invece sbagliata la sua interpretazione.

<sup>†</sup>In questo caso con distanza si intende in vettore che collega i due punti.

## 6. Contemporaneità e causalità

Poniamoci nel sistema di riferimento inerziale  $S$ , osserviamo e prendiamo nota su un grafico  $(ct, x)$  di due eventi  $P_1$  e  $P_2$  che avvengono contemporaneamente. Chiaramente, noi diremo che questi due eventi sono simultanei se la loro coordinata temporale corrisponde, cioè  $t_1 = t_2$ . Possiamo quindi porre  $t = \text{cost}$ , tracciare sul grafico le rette che ne derivano (tratteggiate nel primo grafico della figura 4) e dire che *tutti gli eventi che appartengono alla medesima retta sono simultanei*.

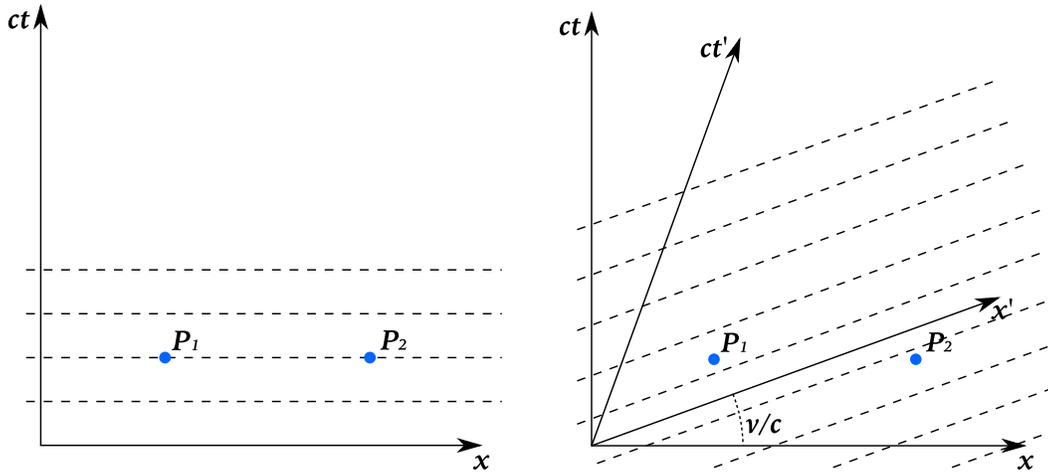


FIGURA 4. Figura delle rette simultanee

Cosa pensa della nostra conclusione un osservatore che si trovi nel sistema di riferimento  $S'$ , in moto a velocità  $v$  rispetto a noi? Egli compirà il nostro stesso ragionamento e tratterà le sue rette di simultaneità ponendo  $t' = \text{cost}$ , che dal nostro punto di vista equivale a  $t - \frac{v}{c^2}x = \text{cost}$ , dando origine alle rette visibili nel secondo grafico. Questo osservatore, quindi, affermerà che i due eventi  $P_1$  e  $P_2$  non sono contemporanei, ma successivi, essendo  $P_2$  avvenuto prima di  $P_1$ .

È chiaro dunque che la simultaneità si unisce alla lunga lista di concetti diventati improvvisamente *relativi*, con alcune riserve.

**6.1. Causa ed effetto.** Consideriamo il caso in cui il professor Onofri, dopo aver intimato più volte ad uno studente di abbassare la voce, si giri e gli lanci un gessetto, colpendolo sulla fronte. Dico un'ovvietà se esplicito che lo studente è stato colpito *perché* il professore ha lanciato il gessetto, e non il contrario. Ma visto che l'*ordine* degli eventi può apparire diverso ad un osservatore esterno in moto, è lecito chiedersi: "A che velocità deve viaggiare un osservatore, solidale al sistema  $S'$ , per vedere *prima* il gessetto colpire lo studente e *poi* il professore lanciarlo?"

Questo succederà se le sue rette di simultaneità hanno una pendenza maggiore della retta su cui giacciono i due eventi (guardare figura 5), per cui è sufficiente imporre la stessa pendenza e sostituire l'uguaglianza con una disuguaglianza.

Centriamo un sistema di riferimento  $(ct, x)$  sulla mano del professore nell'istante in cui lancia il gessetto, e chiamiamo I l'evento in cui il gessetto impatta sulla fronte dello studente. Se il gessetto viaggia a velocità  $v_g$  per la distanza  $d$  tra la mano e la fronte, allora il tempo di volo è  $t = \frac{d}{v_g}$ , che corrisponde alla coordinata temporale dell'evento I. Nel sistema di riferimento  $S'$  il momento

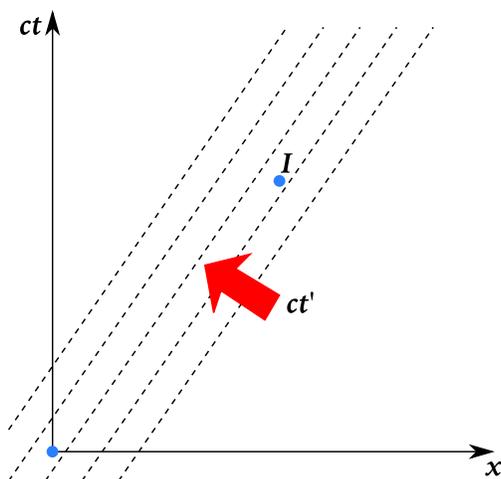


FIGURA 5. Rette di un osservatore che vede causa ed effetto invertiti

dell'impatto è  $t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$ . Ponendo  $t' = 0$  e sostituendo  $t = \frac{d}{v_g}$  otteniamo

$$\frac{d}{v_g} = \frac{v}{c^2} d$$

$$v = \frac{c^2}{v_g}$$

Dunque affinché la *causalità* degli eventi sia invertita, l'osservatore nel sistema  $S'$  deve muoversi con velocità  $v > \frac{c^2}{v_g}$ , che risulta essere  $> c \forall v_g < c$ . Ritenere la velocità della luce un limite *assoluto* comporta anche accettare che l'ordine di due eventi correlati sia il medesimo in qualunque modo questi vengano osservati.

Si può anche notare che per velocità  $v > c$  il rapporto  $\frac{v^2}{c^2}$  diviene minore di zero e il coefficiente  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  perde di significato fisico, rendendo non applicabili le trasformazioni di Lorentz.

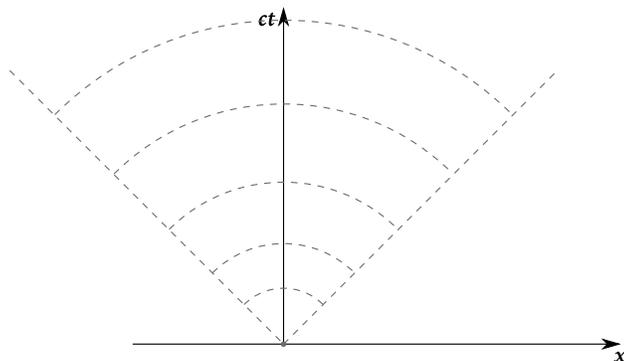


FIGURA 6. Cono di luce in una dimensione spaziale

**6.2. Il “Cono di luce”.** La causalità verrebbe infranta anche se  $v_g$  fosse maggiore di  $c$ , ma visto che ciò non è ritenuto possibile, ci limiteremo a ragionare su  $v_g = c$ . In tal caso la sua traiettoria sarebbe una delle due rette tratteggiate visibili nella figura, a seconda che venga lanciato in verso positivo o negativo, e si avvicinerebbe all'asse  $ct$  per velocità inferiori. Queste due rette

limite evidenziano una regione dello spazio-tempo da cui il gessetto *non può uscire*, finchè la sua velocità è inferiore a  $c$ , e prende il nome di *cono di luce*. Fermandosi a ragionare un attimo risulta chiaro che non può esserci relazione di causalità tra due eventi che non si trovino uno nel cono di luce dell'altro, dato che ciò implicherebbe la trasmissione di informazione a velocità maggiore di  $c$ .

Ovviamente non è facile immaginarsi (nè disegnare) un cono tetradimensionale, ma lo si può visualizzare come una sfera (nelle tre dimensioni spaziali), centrata nel punto in cui ha luogo l'evento di riferimento, il cui raggio aumenta alla velocità della luce. Qualunque altro evento che all'istante  $t$  in cui ha luogo si trovi materialmente fuori da questa sfera, non può essere in alcun modo relazionato con l'evento che si trova al suo centro.

## 7. Intervallo spazio-temporale

Individuiamo nello spazio degli eventi  $(ct, x)$  due punti  $P_1$  e  $P_2$ , con coordinate  $(ct_1, x_1)$  e  $(ct_2, x_2)$ . La distanza temporale e spaziale di questi due eventi è data da  $\Delta t = t_2 - t_1$  e  $\Delta x = x_2 - x_1$ . È chiaro che queste grandezze *non* si conservano sotto trasformazione di Lorentz, per cui risulta utile introdurre l'*intervallo invariante*  $\Delta s^2$  come misura della distanza spazio-temporale tra i due eventi:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

Misurando questo stesso intervallo da un diverso sistema di riferimento  $S'$  osserveremo

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \gamma^2 \left( c \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c} \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x' + v \Delta t')^2 \\ &= \gamma^2 \left( c^2 \Delta t'^2 + \frac{v^2 \Delta x'^2}{c^2} + 2 \Delta t' \Delta x' v - \Delta x'^2 - v^2 \Delta t'^2 - 2 \Delta t' \Delta x' v \right) \\ &= \gamma^2 (c^2 - v^2) \Delta t'^2 - \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta x'^2 \\ &= \frac{c^2}{c^2 - v^2} (c^2 - v^2) \Delta t'^2 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta x'^2 \\ &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \end{aligned}$$

che è identico alla definizione. La grandezza appena definita, pertanto, rimane invariata se misurata da un qualunque sistema di riferimento inerziale. Si generalizza facilmente al caso di tre dimensioni spaziali e una temporale, in cui assume la forma

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ovvero, in forma differenziale

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

**7.1. Osservazioni sul segno di  $\Delta s^2$ .** È chiaro che potendosi calcolare l'intervallo  $\Delta s^2$  per qualunque coppia di punti, questo potrà assumere valori sia positivi che negativi.

Se  $\Delta s^2 > 0$  allora l'intervallo è chiamato *timelike*, e i due eventi cui si riferisce sono *più distanti nel tempo che nello spazio*. Riprendendo la figura precedentemente introdotta, sono reciprocamente all'interno del cono di luce dell'altro. Pertanto una loro interazione è perfettamente possibile.

Al contrario, se  $\Delta s^2 < 0$  l'intervallo è definito *spacelike*, e non è possibile che ci sia sequenzialità tra i due eventi su cui è calcolato. Per quanto detto nel paragrafo 6.1, due osservatori possono discordare sull'ordine di due eventi spacelike, ma saranno sempre d'accordo su quelli di tipo timelike.

Infine, è possibile anche il caso  $\Delta s^2 = 0$  in cui i due eventi si dicono separati *lightlike*. È un concetto diverso da quello che si ha normalmente per "distanza nulla", ma corrisponde proprio a

questo nella metrica di Minkowski. Due eventi separati lightlike possono avere influenza reciproca solo comunicando attraverso onde elettromagnetiche.

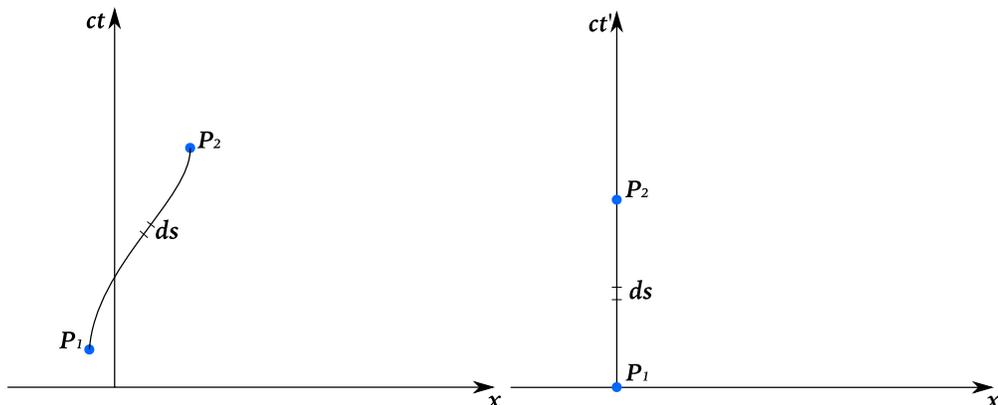


FIGURA 7. Il medesimo percorso come visto da due osservatori diversi

**7.2. Tempo proprio.** Quale sarebbe l'intervallo di tempo misurato da un osservatore che nel suo moto intercetti i due eventi  $P_1$  e  $P_2$ ? Associando un sistema di riferimento  $S'$  all'osservatore in moto, possiamo indicare sul grafico a destra della figura 7 la sequenza degli eventi così come osservata da lui. Pertanto, nel sistema  $S$  l'intervallo spaziotemporale sarà

$$(104) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Diversamente, visto dal sistema  $S'$ , le componenti spaziali spariscono, dal momento che *osservatore e sistema si muovono insieme*

$$(105) \quad ds^2 = c^2 dt'^2$$

Dato che l'intervallo  $ds^2$  è invariante, possiamo uguagliare la (104) e la (105) ottenendo

$$(106) \quad c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

dove

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

Integrando la (106) tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  si ottiene

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

che è l'intervallo temporale misurato da  $S'$ . Ristretto al caso in cui quest'ultimo sia un sistema inerziale, si ha

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

In generale, il tempo  $\tau$  associato ad un sistema in moto è chiamato *tempo proprio*, e definito come

$$\tau = \int \frac{dt}{\gamma} = \int \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt$$

dove  $v(t)$  evidenzia la dipendenza dal tempo di  $v$ .

## 8. L'effetto Doppler relativistico

Nel 1842 Christian Doppler suggerì che il colore della luce che arriva da sistemi di stelle binari dovrebbe variare periodicamente, come conseguenza dell'elevata velocità a cui queste si muovono. L'effetto è analogo a quello che si osserva nelle onde acustiche, con una *sottile* differenza.

Nel caso delle onde acustiche, detta  $v_s$  la velocità della sorgente,  $v_o$  quella dell'osservatore e  $v_m$  quella del mezzo (cioè l'aria)<sup>‡</sup>, la frequenza  $f_0$  emessa dalla sorgente viene misurata dall'osservatore come

$$f = f_0 \frac{v_m - v_o}{v_m - v_s}$$

è chiaro che in questo caso *esiste* un sistema di riferimento privilegiato, rispetto al quale l'aria è ferma. Inoltre, la velocità del suono è costante *rispetto al mezzo*, cosa che porta osservatori diversi a misurare in generale velocità del suono diverse. L'effetto Doppler acustico, quindi, è da ricondursi al fatto che l'onda viaggia attraverso un mezzo, messo in relazione agli osservatori attraverso la relatività Galileiana.

Se fosse stata trovata evidenza sperimentale dell'etere, allora per la luce varrebbe la stessa relazione, e il sistema di riferimento privilegiato sarebbe quello solidale all'etere. Tuttavia, non solo non si è mai trovata evidenza dell'esistenza dell'etere, ma, come postulato da Einstein, la velocità della luce è costante *per qualunque sistema di riferimento*.

Questo significa che l'effetto Doppler per le onde sonore e quelle elettromagnetiche esistono per ragioni diverse.

**8.1. Caso unidimensionale.** Si consideri un'onda in moto a velocità  $v_o$  nel sistema di riferimento  $S$ . Possiamo rappresentare l'onda attraverso la funzione

$$\Phi = A \sin(\omega t - kx) = A \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

La sua velocità di propagazione sarà data da

$$v_o = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Passando al sistema  $S'$  in moto a velocità  $v$  rispetto a  $S$  otteniamo

$$\Phi' = A \sin\left(\gamma\omega\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right) - \gamma k(x' + vt')\right) = A \sin(\omega't' - k'x')$$

dove la pulsazione e il numero d'onda nel sistema  $S'$  sono diventati

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - kv) \\ k' &= \gamma\left(k - \frac{v\omega}{c^2}\right)\end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente imporre  $v_o = c$ , cosa che implica  $\lambda f = c$  e  $\frac{\omega}{k} = c$ . Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \\ k' &= \gamma k\left(1 - \frac{v}{c}\right) = k\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\end{aligned}$$

<sup>‡</sup>di ogni velocità va presa solo la componente parallela alla direzione che unisce sorgente e osservatore, riducendo così il problema al caso unidimensionale.

ed infine si ricavano la nuova frequenza e lunghezza d'onda

$$(107) \quad f' = \frac{f}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \quad \lambda' = \lambda \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

**8.2. Caso trasversale.** Si immagini una sorgente E in moto a velocità  $\mathbf{v}$  nel sistema di riferimento  $S'$ , rispetto al quale è fermo l'osservatore  $O'$ . La sua velocità può essere scomposta nelle componenti ortogonale e parallela alla direzione d'osservazione, diventando rispettivamente  $v \cos \theta$  e  $v \sin \theta$ . Ci limiteremo a considerare, per semplicità, il caso  $\theta = \pi/2$ , l'istante cioè in cui la sorgente è alla minima distanza dall'osservatore. Valgono le seguenti relazioni

$$(108) \quad \begin{aligned} f &= \frac{1}{T} & \lambda &= \frac{c}{f} \\ \omega &= 2\pi f & k &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Il periodo  $T'$  misurato dall'osservatore  $O'$  sarà legato a  $T$  attraverso la relazione  $T' = \gamma T$ . Quindi le (108) diventeranno

$$(109) \quad \begin{aligned} f' &= \frac{f}{\gamma} & \lambda' &= \gamma \lambda \\ \omega' &= \frac{\omega}{\gamma} & k' &= \frac{k}{\gamma} \end{aligned}$$

è quindi banale osservare che la radiazione subirà un *redshift* pari al fattore  $\gamma$ . Questo tipo di distorsione non è previsto nel caso delle onde acustiche, in quanto la loro velocità non si conserva cambiando sistema di riferimento.

**8.3. Caso generale.** Il caso più generale di  $\theta$  qualunque porta alla formula per la frequenza

$$f' = \frac{f}{\gamma \left(1 + \frac{v \cos \theta}{c}\right)}$$

che si riduce alle (109) se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , e alle (107) se  $\theta = 0$ .

## 9. “Paradossi” relativistici

**9.1. Il paradosso del treno.** Si immagini un treno di lunghezza a riposo  $L_0$  che viaggia a velocità  $v$ . Nel suo cammino incontra una galleria che, per pura coincidenza, ha la sua medesima lunghezza  $L_0$ . Tuttavia, un osservatore dalla vista molto acuta fermo nei pressi della galleria, nota che, per alcuni attimi, il treno si trova *completamente* all'interno della galleria. La sua osservazione è corretta, dal momento che il treno, data la sua velocità, subisce una contrazione nel verso del moto, diventando quindi più corto della galleria.

Un altro osservatore, altrettanto attento, che si trova sul treno, afferma l'esatto opposto. Secondo lui, infatti, per alcuni attimi i due estremi del treno si sono trovati contemporaneamente fuori dalla galleria. Dal suo punto di vista è la galleria a muoversi verso il treno con velocità  $v$  e subisce pertanto una contrazione che la fa diventare più corta del treno.

Questo, che può sembrare paradossale, non lo è affatto. Quest'idea sbagliata sorge dalla nostra concezione quotidiana della contemporaneità, dettata dalle velocità non relativistiche a cui siamo abituati. Nella figura 8 sono stati indicati con  $(ct, x)$  gli assi del sistema in cui si trova l'osservatore che vede il treno muoversi. Il segmento  $G_A G_B$  rappresenta gli estremi della galleria, mentre il segmento  $T_A T_B$  rappresenta il treno. Si può vedere che, per l'osservatore fermo, nell'istante  $T_0$  in cui il treno esce dalla galleria, la coda del treno vi è già dentro. Questi due eventi, tuttavia, non sono contemporanei per l'osservatore sul treno. Tracciando infatti la retta di contemporaneità parallela ad  $x'$  e passante per  $T_0$  si trova che la coda del treno non è ancora all'interno della galleria.

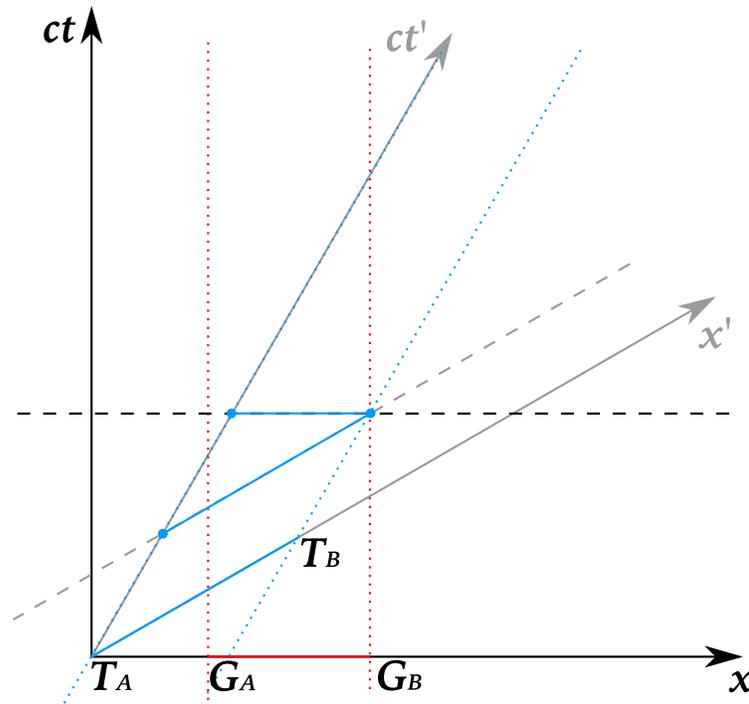


FIGURA 8. Il sistema  $(ct, x)$  è fermo rispetto alla galleria, mentre il sistema  $(ct', x')$  è posizionato sul treno. Il segmento rosso rappresenta la galleria, quello blu il treno. Le rette tratteggiate in nero e grigio sono rette di contemporaneità, riferite rispettivamente agli assi  $(ct, x)$  e  $(ct', x')$ . Si osserva che dal punto di vista di chi sta sul treno *la galleria non lo contiene mai del tutto*, mentre è vero l'opposto per chi è fermo rispetto alla galleria.

La risoluzione, quindi, non riguarda ipotesi di lavoro sbagliate o ragionamenti non corretti. Semplicemente, quello che a noi sembra paradossale, non lo è. La realtà appare diversa ai due osservatori, ed è sbagliato pensare che solo una delle due osservazioni possa essere corretta.

**9.2. L'accelerazione in relatività e il paradosso dei gemelli.** Fino ad ora si è parlato solamente di moti rettilinei uniformi. In relatività si possono descrivere gli effetti sullo spazio e sul tempo provocati da un moto accelerato. Studieremo il caso più semplice di un punto materiale che si muove, rispetto ad un dato sistema di riferimento inerziale, con accelerazione costante. A basse velocità un'accelerazione costante non mostra alcuna differenza sul moto rispetto a quella descritta dalla cinematica classica. Tuttavia è chiaro che un corpo non può accelerare costantemente per un tempo indefinito, altrimenti violerebbe i presupposti della relatività. Per questa ragione è utile studiare l'andamento dell'accelerazione al crescere della velocità del corpo. Studieremo il caso più semplice del moto in una sola dimensione.

Consideriamo un sistema di riferimento  $S'$  in cui un punto materiale risulta essere istantaneamente fermo. In questa situazione un'accelerazione costante non costituisce nessun problema. Rispetto a questo sistema di riferimento l'accelerazione è  $a'$ . Cerchiamo allora il valore dell'accelerazione  $a$  in un sistema di riferimento  $S$  rispetto al quale  $S'$  si muove con velocità  $v$ . Chiamiamo  $u$  e  $u'$  le velocità del punto nei sistemi  $S$  e  $S'$  rispettivamente. Utilizzando la regola di Leibniz si trova

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{du}{du'} \frac{du'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = a' \frac{du}{du'} \frac{dt'}{dt}$$

La prima derivata può essere ottenuta a partire dalla formula per la composizione delle velocità quindi

$$\frac{d}{du'} \left( \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \right) = \frac{c^2(c^2 - v^2)}{(c^2 + u'v)^2} = \frac{c^4}{\gamma^2(c^2 + u'v)^2}$$

La seconda invece si trova con la trasformazione di Lorentz per la coordinata temporale

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \right) = \gamma \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\gamma}$$

Ricomponendo i risultati si trova

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\gamma^3} \frac{c^4}{(c^2 + u'v)^2} \mathbf{a}'$$

Ma siccome abbiamo che  $u' = 0$  e quindi  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , l'equazione si riduce a

$$\mathbf{a} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{a}'$$

Da questa formula si deduce che nella teoria della relatività è possibile parlare di accelerazione costante esclusivamente nel caso in cui il corpo che sta accelerando si trova istantaneamente in quiete rispetto al nostro sistema di riferimento inerziale. Si può notare inoltre che questo valore dell'accelerazione è pari quello misurato da un osservatore solidale al punto materiale cambiato di segno (cioè l'accelerazione dovuta alla forza apparente).

Sotto queste condizioni, il tempo misurato nel sistema di riferimento  $S'$  coincide con il tempo proprio del punto. Possiamo scrivere quindi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \frac{1}{\gamma} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

Sostituendo la prima equazione per l'accelerazione si trova

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \mathbf{a}'$$

Oppure

$$\frac{d\tau}{d\mathbf{u}} = \frac{1}{\mathbf{a}'} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1}$$

Integrando rispetto a  $\mathbf{u}$  si trova

$$\tau = \int \frac{d\tau}{d\mathbf{u}} d\mathbf{u} = \int \frac{1}{\mathbf{a}'} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1} d\mathbf{u} = \frac{c}{\mathbf{a}'} \operatorname{artanh} \left( \frac{\mathbf{u}}{c} \right) + k$$

Possiamo scegliere l'origine di  $\tau$  in modo che sia 0 quando  $\mathbf{u} = 0$ , quindi la costante di integrazione  $k$  scompare. Invertendo la formula si trova che la velocità  $\mathbf{u}$  in funzione di  $\tau$  è

$$\mathbf{u} = c \tanh \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right)$$

Si trova allora che la funzione  $\gamma(\tau)$  è

$$\gamma = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sech} \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right)} = \cosh \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right)$$

Integrando  $\gamma$  rispetto a  $\tau$  si ottiene

$$t = \int \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int \cosh \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right) d\tau = \frac{c}{\mathbf{a}'} \sinh \left( \frac{\mathbf{a}'\tau}{c} \right) + k$$

Anche qui, è conveniente scegliere  $t$  in maniera che sia 0 quando  $\tau = 0$ . Invertendo l'equazione si ottiene

$$\tau = \frac{c}{a'} \operatorname{arsinh} \left( \frac{a't}{c} \right)$$

Abbiamo dunque trovato un'equazione che mette in relazione il tempo proprio del punto materiale a quello del sistema di riferimento  $S$ . Questo risultato è fondamentale per spiegare il famoso *paradosso dei gemelli*. Il paradosso (che è del tutto apparente) si basa sulla dilatazione dei tempi, già incontrata. Supponiamo che un'astronave parta dalla Terra per un viaggio verso la stella Vega, con a bordo Bruno, fratello gemello di Alberto, che invece rimane sulla Terra. Dal punto di vista di Alberto, l'orologio di Bruno si muove più lentamente, quindi egli si aspetta che quando il fratello tornerà sulla Terra sarà invecchiato più di lui. D'altro canto, dal punto di vista di Bruno è Alberto a muoversi, quindi egli prevede che sarà il fratello ad essere più giovane quando Bruno farà ritorno! Ma chi dei due ha ragione? L'errore che stiamo commettendo è assumere che il sistema di riferimento di Bruno sia inerziale. Questo non può certamente essere vero, perchè egli deve accelerare sia per raggiungere una certa velocità relativa alla Terra, sia quando deve invertire il senso di marcia per fare ritorno.

Consideriamo il caso più semplice in cui accelera con accelerazione costante  $a$  (si intende quella misurata sull'astronave) per un intervallo di tempo  $T_a$  fino a raggiungere la velocità di crociera  $v_c$ . Successivamente viaggia a velocità costante per un tempo  $T_c$  fino a quando è il momento di decelerare, che avviene con accelerazione  $-a$  (i tempi sono quelli misurati dalla Terra). Al ritorno l'astronave compie lo stesso moto al contrario. Il tempo trascorso sull'astronave è

$$2\frac{c}{a} \operatorname{arsinh} \left( \frac{aT_a}{c} \right) + 2T_c \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}} + 2\frac{c}{-a} \operatorname{arsinh} \left( \frac{-aT_a}{c} \right) = 4\frac{c}{a} \operatorname{arsinh} \left( \frac{aT_a}{c} \right) + 2T_c \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}$$

Questo tempo è sempre maggiore di quello misurato sulla Terra, che è  $4T_a + 2T_b$ , quindi possiamo concludere che Bruno sarà il più giovane quando tornerà sulla Terra.

## 10. Derivazione alternativa delle trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz possono essere ottenute senza conoscere la relatività, semplicemente imponendo l'invarianza dell'equazione delle onde elettromagnetiche in seguito al passaggio ad un nuovo sistema di riferimento. Per semplicità, studiamo il caso di un'onda che dipende solo dalla direzione  $x$  del sistema di riferimento  $S$ . L'equazione che descrive quest'onda è

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, t)}{\partial t^2}$$

Ancora una volta consideriamo un sistema di riferimento  $S'$ , che coincidono al tempo  $t = 0$ , che si muove con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$ . Come abbiamo visto nella prima derivazione delle trasformazioni, il sistema di trasformazioni più generale è

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \alpha x + \beta t \end{cases}$$

Calcolando le relazioni tra derivate di  $\mathbf{E}$  rispetto alle coordinate di  $S$  e  $S'$ , si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}(x', t')}{\partial x} &= \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathbf{E} = \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathbf{E} \\ \frac{\partial \mathbf{E}(x', t')}{\partial t} &= \left( \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathbf{E} = \left( -\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \beta \frac{\partial}{\partial t'} \right) \mathbf{E} \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono dunque

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x', t')}{\partial x'^2} = \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x', t')}{\partial t'^2} = \left( -\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \beta \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 \mathbf{E}$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione delle onde otteniamo

$$\gamma^2 (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2} + 2\gamma(\alpha c^2 + \beta v) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x' \partial t'} + (c^2 \alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t'^2} = 0$$

Affinché l'equazione mantenga la stessa forma è necessario imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \alpha^2 (c^2 - v^2) = c^2 \\ 2\gamma(\alpha c^2 + \beta v) = 0 \\ (c^2 \alpha^2 - \beta^2) = -1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trovano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \gamma = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{v}{c^2} \end{cases}$$

Sostituendo nelle trasformazioni si trovano precisamente le trasformazioni di Lorentz.

### 10.1. Le relazioni di Planck-Einstein e De Broglie come relazione tra quadrivettori.

$$E = \hbar \omega, \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$\mathbf{p}_\mu = \{E/c, \mathbf{p}\} = \hbar \{\omega/c, \mathbf{k}\}$$

La relazione  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  è la relazione di De Broglie, essendo  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ .

## La formulazione covariante dell'elettrodinamica

### 1. Breve introduzione al calcolo tensoriale

Il calcolo tensoriale si diffuse principalmente per l'uso che ne fece Albert Einstein nel 1916 all'interno della relatività generale. Verificata tramite questa teoria l'equivalenza fisica di tutti i sistemi inerziali dal punto di vista sia meccanico sia elettromagnetico, era necessario una riformulazione delle leggi che stanno alla base della meccanica e della dinamica Newtoniana perchè fosse sempre verificata la loro validità.

L'introduzione del calcolo tensoriale è infatti caratterizzata dal vantaggio di poter rappresentare le equazioni fisiche indipendentemente dalla scelta di un sistema di coordinate. Il formalismo tensoriale risulterà dunque non più basato su oggetti definiti nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$ , ma sulla metrica  $g^{\mu\nu}$  di Minkowski dello spazio-tempo.

**1.1. Tensori covarianti e controvarianti.** Dal capitolo precedente è noto che il prodotto scalare tra due quadrivettori  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  nella metrica di Minkowski è dato da:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$$

Immaginiamo ora di inserire nel prodotto con il tensore metrico un solo quadrivettore  $\underline{u}^\alpha$ , in questo caso il risultato è:

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta$$

Il vettore  $\underline{u}_\alpha$  viene detto *vettore covariante*, mentre il vettore di partenza  $\underline{u}^\alpha$  viene detto *vettore controvariante* (per convenzione gli indici di un vettore covariante vengono posti in basso mentre quelli di un vettore controvariante vengono posti in alto). Un prodotto scalare quindi è sempre costituito dal prodotto tra un vettore controvariante e uno covariante.

Un vettore covariante rappresenta quindi un funzionale lineare che associa ad ogni vettore dello spazio (vettore controvariante) uno scalare.

E' inoltre sempre possibile definire una base  $\underline{\omega}^\alpha$  tale per cui:

$$\underline{\omega}^\alpha \cdot \underline{e}_\alpha = \delta_\beta^\alpha$$

e ogni vettore covariante  $\eta$  può essere scritto come:

$$\eta = \eta^\alpha \omega_\alpha$$

I vettori covarianti quindi non sono altro che i covettori che costituiscono lo spazio duale associato allo spazio di partenza. La base  $\omega^\alpha$  è quindi la base dello spazio duale.

Definendo la matrice metrica inversa come:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$$

È possibile passare da un vettore controvariante  $\underline{u}^\alpha$  al relativo vettore covariante  $\underline{u}_\alpha$  e viceversa nel seguente modo:

$$\underline{u}_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \qquad \underline{u}^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta$$

Si ha quindi che la matrice metrica  $g$  permette di passare da un vettore controvariante al relativo vettore covariante (si dice che abbassa gli indici), mentre la matrice metrica inversa associa ad un vettore covariante il relativo vettore controvariante (si dice che alza gli indici).

Per la convenzione sulle somme si effettua la somma su tutti gli indici uguali posti uno in alto e uno in basso, quindi se una matrice agisce su un vettore controvariante (con indice in alto) verrà scritta con indici in basso e, viceversa, se agisce su di un vettore covariante (indice in basso) verrà scritta con gli indici in alto.

Le trasformazioni di Lorentz per un generico vettore  $v$  e un generico covettore  $\eta$  si possono rappresentare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} v^{\alpha'} &= \Lambda_{\beta}^{\alpha'} v^{\beta} & e & & v^{\alpha} &= \Lambda_{\beta'}^{\alpha} v^{\beta'} \\ \eta_{\alpha'} &= \Lambda_{\alpha'}^{\beta} \eta_{\beta} & e & & \eta_{\alpha} &= \Lambda_{\alpha}^{\beta'} \eta_{\beta'} \end{aligned}$$

Scalari, vettori e covettori sono semplici esempi di oggetti geometrici chiamati *tensori*. Un tensore è un funzionale lineare che associa a  $p$  vettori ed  $n$  covettori uno scalare.

Un tensore che associa uno scalare a  $p$  vettori ed  $n$  covettori si dice tensore di rango  $\binom{n}{p}$ , infatti si può rappresentare con un oggetto geometrico a  $n + p$  indici la cui contrazione con  $p$  vettori e  $n$  covettori dà uno scalare.

Un tensore dal quale si ottiene uno scalare a partire da soli vettori controvarianti si dice *tensore controvariante*; un tensore che dà uno scalare a partire da soli vettori covarianti si dice *tensore covariante*.

In generale un tensore può essere covariante per alcuni indici e controvariante per altri. In un tensore gli indici covarianti vengono scritti in alto mentre quelli controvarianti in basso, così da poter essere sommati con gli indici dei rispettivi vettori.

Per esempio, se  $S$  è un tensore di rango  $\binom{2}{1}$ :

$$S(\sigma_{\alpha} \omega^{\alpha}, \lambda_{\beta} \omega^{\beta}, \nu^{\gamma} e_{\gamma}) = \sigma_{\alpha} \lambda_{\beta} \nu^{\gamma} S(\omega^{\alpha}, \omega^{\beta}, e^{\gamma}) = S_{\gamma}^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \lambda_{\beta} \nu^{\gamma}$$

Dove le  $S_{\gamma}^{\alpha\beta}$  sono dette *componenti* del tensore nel sistema di coordinate prescelto.

Se volessi esprimere lo stesso tensore in un altro sistema di riferimento dovrei soddisfare la relazione:

$$S_{\gamma'}^{\alpha'\beta'} \sigma_{\alpha'} \lambda_{\beta'} \nu^{\gamma'} = S_{\gamma}^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \lambda_{\beta} \nu^{\gamma} = S_{\gamma}^{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \sigma_{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \lambda_{\beta'} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma} \nu^{\gamma'}$$

Ma questo significa che:

$$S_{\gamma'}^{\alpha'\beta'} = S_{\gamma}^{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\gamma'}^{\gamma}$$

Abbiamo così ricavato le leggi di trasformazione che permettono di ricavare le componenti di un tensore in un diverso sistema di riferimento.

Facciamo ora un'ultima osservazione importante. Supponiamo di voler trovare l'equivalente di rango  $\binom{1}{2}$  del tensore  $S_{\gamma}^{\alpha\beta}$ , ovvero di voler trovare la relazione che lega il tensore  $S_{\gamma}^{\alpha\beta}$  al tensore  $S_{\beta\gamma}^{\alpha}$ . Dovrà valere allora la relazione:

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha} \sigma_{\alpha} \lambda^{\beta} \nu^{\gamma} = S_{\gamma}^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \lambda_{\beta} \nu^{\gamma} = S_{\gamma}^{\alpha\mu} \sigma_{\alpha} g_{\mu\beta} \lambda^{\beta} \nu^{\gamma}$$

Semplificando i vettori si giunge quindi alla relazione:

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha} = g_{\mu\beta} S_{\gamma}^{\alpha\mu}$$

Il tensore metrico quindi è in grado di abbassare gli indici di un qualsiasi tensore, allo stesso modo il suo inverso è in grado di alzarli. Questo significa che, mediante il tensore metrico e il suo

inverso, è possibile convertire un qualsiasi tensore di rango  $\binom{n}{p}$  in un altro tensore equivalente di rango qualsiasi, purché si conservi la somma  $n + p$  senza perdere alcuna informazione.

**1.2. Invarianza.** Come prima analisi, si pone l'obiettivo di verificare l'invarianza di espressioni tensoriali rispetto a cambiamenti di sistemi di riferimento.

Di seguito è riportato un esempio di verifica nello spazio tridimensionale  $\mathbb{R}^3$ .

Si considerino due vettori  $\mathbf{v}_k$  e  $\mathbf{u}_h$  definiti dalla metrica  $\delta_{kh}$  nello spazio Euclideo. Il loro prodotto scalare è definito come

$$\mathbf{v}_k \mathbf{u}_h g^{kh} = \mathbf{v}_k \mathbf{u}_h \delta_k^h = \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

Si esprimono ora nuovi vettori  $\underline{\mathbf{v}}'$  e  $\underline{\mathbf{u}}'$  risultanti da una trasformazione  $\mathbf{R}_i^j$  di rotazione.

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{R}_i^j \mathbf{v}_j \qquad \mathbf{u}'_i = \mathbf{R}_i^j \mathbf{u}_j$$

Si calcola il prodotto scalare fra i nuovi vettori.

$$\underline{\mathbf{v}}' \cdot \underline{\mathbf{u}}' = \mathbf{R}_i^j \mathbf{v}_j \mathbf{R}_i^k \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_j (\mathbf{R}_j^e)^T \mathbf{R}_e^k \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_j \mathbf{u}_j$$

Perché venga rispettata l'invarianza del prodotto scalare per cambiamenti di sistema occorre che l'espressione  $(\mathbf{R}_j^e)^T \mathbf{R}_e^k$  sia pari all'identità. Nello spazio Euclideo questo corrisponde a

$$(\mathbf{R}_j^e)^T \mathbf{R}_e^k = \delta_j^k \rightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

Nello stesso modo si verifica l'invarianza per trasformazioni di Lorentz nello spazio  $\mathcal{M}^4$  definito dalla metrica di Minkowski.

Si considera il prodotto scalare fra i vettori  $\mathbf{v}_\mu$  e  $\mathbf{u}_\nu$ , imponendo l'uguaglianza al prodotto scalare fra gli stessi vettori sottoposti a trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_\mu &= \Lambda_\mu^\nu \mathbf{v}_\nu \\ \mathbf{u}'_\nu &= \Lambda_\nu^\rho \mathbf{u}_\rho \end{aligned}$$

Si verifica quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mu \mathbf{u}_\nu g^{\mu\nu} &= \mathbf{v}'_\mu \mathbf{u}'_\nu g^{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \mathbf{v}_\rho \Lambda_\nu^\sigma \mathbf{u}_\sigma g^{\mu\nu} \\ &= \mathbf{v}_\rho (\Lambda_\rho^\mu)^T \Lambda_\nu^\sigma g^{\mu\nu} \mathbf{u}_\sigma = \mathbf{v}_\rho (\Lambda_\rho^\mu)^T g^{\mu\nu} \Lambda_\nu^\sigma \mathbf{u}_\sigma \\ &\quad \downarrow \\ &= \mathbf{v}_\rho (\Lambda^T g \Lambda)_\rho^\sigma \mathbf{u}_\sigma = \mathbf{v}_\rho g^{\rho\sigma} \mathbf{u}_\sigma \end{aligned}$$

Sono dunque definite trasformazioni di Lorentz quelle trasformazioni che lasciano invariata la metrica di Minkowski.

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

In conclusione, considerato un vettore  $\underline{AB}$  con estremi  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  in  $\mathbb{R}^3$ , si ha che l'elemento invariante nella metrica Euclidea è la distanza,

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

mentre, con un quadrivettore  $\underline{CD}$  di estremi  $(x_c, y_c, z_c, ct_c)$  e  $(x_d, y_d, z_d, ct_d)$ , nella nuova metrica

di Minkowski si definisce invariante la quantità

$$\Delta s^2 = c^2(t_c - t_d)^2 - (x_c - x_d)^2 - (y_c - y_d)^2 - (z_c - z_d)^2.$$

**1.3. Il tensore  $F_{\mu\nu}$ .** Per applicare le equazioni di Maxwell, invarianti e compatibili al principio di relatività di Einstein, occorre trovare una forma tensoriale che le rappresenti nelle sue caratteristiche.

Il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$ , vettori nello spazio Euclideo, sono costituiti da un totale di 6 componenti: troppe per essere rappresentate da un quadrivettore in  $\mathcal{M}^4$ .

Si ricorre allora al tensore  $F_{\mu\nu}$ .

Questo particolare tensore doppio ha la proprietà di antisimmetria

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

Ciò comporta:

- annullamento di tutte le componenti diagonali della matrice ( $\mu = \nu$ );
- componenti con  $\mu < \nu$  (posizionate "sopra" la diagonale) uguali in modulo e di segno opposto alle componenti con  $\mu > \nu$  (posizionate "sotto" la diagonale).

Queste caratteristiche riducono gli elementi del tensore da 16 a 6, il numero esatto delle componenti indipendenti dei campi.

Con la seguente convenzione dei segni applicata alla metrica di Minkowski,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si definisce il tensore  $F_{\mu\nu}$  di campo elettromagnetico in forma covariante, in cui la prima riga e la prima colonna sono occupate dalle componenti di  $\vec{E}$  e la parte spaziale della matrice 3x3 è riservata al campo  $\vec{B}$ .

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

Separando in modo esplicito le componenti dei campi, è legittimo scrivere

$$F_{i1} = E_i \qquad F_{jk} = \epsilon_{jkl} B^l$$

dove  $i, j, k, l$  assumono i valori (2, 3, 4).

Il simbolo  $\epsilon_{ijk}$  è il tensore antisimmetrico di Levi-Civita ed assume i valori

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{per 2 indici uguali} \\ 1 & \text{per permut. pari di } ijk \\ -1 & \text{per permut. dipari di } ijk \end{cases}$$

Riprendendo concetti della teoria elettromagnetica, è possibile dare di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  un'espressione in funzione di un potenziale scalare  $\phi$  e un potenziale vettoriale  $\vec{A}$ . Complessivamente tali potenziali sono dipendenti da 4 componenti (una per il potenziale scalare e 3 per il potenziale vettore), le

quali raggruppate costituiscono il quadrivettore potenziale

$$A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

Conseguentemente, si può esprimere il tensore di campo elettromagnetico in funzione del quadrivettore potenziale.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dove  $\partial_\mu$  è il quadrivettore gradiente che risulta definito come

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = -\partial^\mu$$

Si procede ora con la dimostrazione. Ricordando l'espressione di  $F_{\mu\nu}$  per il campo elettrico, si pongono  $\mu = i$  e  $\nu = 1$  e si ottiene

$$F_{i1} = \partial_i A_1 - \partial_1 A_i$$

Per definizione del quadrivettore gradiente si ha

$$F_{i1} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

Questa corrisponde alla  $i$ -esima componente dell'equazione vettoriale che esprime  $\vec{E}$  in funzione dei potenziali.

$$\vec{E} = -\nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eseguiamo il medesimo procedimento per quanto riguarda il campo  $\vec{B}$ . Riprendendo la precedente definizione tensoriale si ha

$$F_{jk} = \epsilon_{jkl} B^l = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

Sfruttando la proprietà del tensore di Levi-Civita in cui

$$\epsilon^{ijl} \epsilon_{ijk} = 2\delta_k^l,$$

si moltiplicano entrambi i membri per  $\frac{\epsilon^{ijl}}{2}$  ottenendo

$$B^l = \frac{1}{2} \epsilon^{ijl} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right) = (\nabla \times \mathbf{A})^l$$

che rappresenta  $l$ -esima componente del rotore di  $\vec{A}$ . L'espressione per il campo magnetico  $\vec{B}$  risulta essere il rotore del potenziale vettoriale.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

**1.4. Forma compatta delle equazioni di Maxwell.** Nella precedente sezione è stato dimostrato come il tensore  $F_{\mu\nu}$  rispetti le definizioni dei campi in funzione dei potenziali. Cerchiamo ora la riformulazione tensoriale delle seguenti equazione di Maxwell, in modo che la loro validità rimanga tale in ogni sistema inerziale.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases}$$

Due di queste equazioni dipendono dalla densità di carica  $\rho$  e dalla densità di corrente  $\vec{J}$ . Ci si chiede allora come variano queste grandezze sotto trasformazioni.

E' stato verificato sperimentalmente che la carica elettrica  $q$ , quantità scalare, è invariante sotto qualsiasi variazione di sistema inerziale. Questo però non ha come conseguenza diretta l'invarianza di  $\rho$ , che, al contrario, data la sua dipendenza dal volume spaziale al quale è associata, non rimane costante sotto trasformazioni di Lorentz. La stessa conclusione si trae per la densità di corrente, la quale essendo definita come

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

non può che variare sotto trasformazioni di Lorentz, vista la dipendenza da  $\rho$ . Unendo allora queste quantità si definisce il quadrivettore densità di corrente, con le seguenti componenti.

$$\vec{J}_\mu = (c\rho, \vec{J})$$

Consideriamo le due equazioni di Maxwell in cui non appaiono gli elementi del quadrivettore corrente. Queste sono rappresentate dalla forma tensoriale

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \text{ con } \mu = (1, 2, 3, 4)$$

nella quale il simbolo di Levi-Civita definito in  $\mathbb{R}^3$  è stato generalizzato per lo spazio-tempo di Minkowski, in  $\mathcal{M}^4$ .

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{permutazione pari di } 1234 \\ -1 & \text{permutazioni dispari di } 1234 \\ 0 & \text{due indici uguali} \end{cases}$$

Procediamo alla verifica. Se consideriamo la parte spaziale del tensore  $F$ , i parametri  $\nu\alpha\beta$  possono assumere i valori 2, 3, 4. Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}(\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23}) = \frac{1}{3}(\partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 + \partial_4 B_4) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

E' stata così verificata la divergenza del campo magnetico. Passiamo ora al rotore del campo elettrico.

Nel caso in cui uno dei parametri assumesse il valore  $k = 1$ , includendo quindi la componente temporale al calcolo, si ha

$$\partial_i F_{jk} = \frac{1}{3}(\partial_i F_{j1} + \partial_j F_{1i} + \partial_1 F_{ij})$$

Per la proprietà di antisimmetria del tensore elettromagnetico,  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , si ottiene

$$\partial_i F_{jk} = \frac{1}{3}(\partial_i E_j - \partial_j E_i + \epsilon_{ijk} \partial_1 B^k) = 0$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $\epsilon^{ij\ell}$ , si ricava la  $l$ -esima componente dell'equazione vettoriale del rotore di  $\vec{E}$ .

$$\epsilon^{ij\ell} \frac{\partial E_i}{\partial x^j} + \frac{1}{c} \frac{\partial B^\ell}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le rimanenti equazioni di Maxwell, dipendete da densità di corrente  $\vec{J}$  e densità di carica  $\rho$ , sono sintetizzate dalla forma tensoriale

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

Si sviluppano due casi differenti.

Se  $\nu = 1$ , si ricava l'equazione della divergenza del campo elettrico.

$$\partial_\mu F_{\mu 1} = \partial_\mu E_\mu = \frac{4\pi}{c} J_1 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

Se invece  $\nu = i$ , si ottiene la  $i$ -esima componente dell'equazione del rotore del campo magnetico.

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= \partial_1 F_{1i} + \partial_k F_{ki} = -\partial_1 E_i + \partial_k \epsilon_{kij} B^j \\ &= (\nabla \times \mathbf{B})^i - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_i \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

In conclusione, si sono ricavate due equazioni tensoriali in grado di riprodurre in forma compatta le quattro equazioni di Maxwell espresse in meccanica classica. Utilizzando ora il formalismo tensoriale, queste equazioni manterranno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

$$\begin{cases} \partial_\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\nu \\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

**1.5. Trasformazioni di Lorentz del campo elettrico e magnetico.** Nel momento in cui si effettua un cambiamento di sistema inerziale, passando da un generico  $K$  ad un  $K'$ , tramite trasformazione di Lorentz, il nuovo tensore elettromagnetico risultante si esprime generalmente come

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \Lambda_{\mu\rho} \Lambda_{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho} F_{\rho\sigma} \Lambda_{\sigma\nu}^T \\ &\rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^T \end{aligned}$$

Proponiamo ora esempi di trasformazioni di Lorentz lungo direzioni differenti per studiare i cambiamenti delle componenti di campo magnetico e campo elettrico.

1.5.1. *Esempio: trasformazione lungo  $\vec{x}$ .* Si considera una trasformazione di Lorentz unicamente lungo la direzione  $\vec{x}$  con velocità  $\vec{v} = \vec{\beta}c$ .

Dividiamo il tensore elettromagnetico in 4 blocchi  $2 \times 2$ , rinominati brevemente come in seguito.

$$F = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \hline E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right)$$

La matrice  $\Lambda$  di trasformazione è pari a

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cc|cc} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Per ricavare il tensore  $F'$  relativo alla trasformazione si calcola il seguente prodotto matriciale.

$$\begin{aligned} F' &= \left( \begin{array}{c|c} \frac{F'_{11}}{F'_{21}} & \frac{F'_{12}}{F'_{22}} \\ \hline \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11}F_{11} & \Lambda_{11}F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_{11}F_{11}\Lambda_{11} & \Lambda_{11}F_{12}\Lambda_{11} \\ \hline F_{21}\Lambda_{11} & F_{22} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dal risultato ottenuto è evidente l'invarianza della componente del campo magnetico lungo  $\vec{x}$  direzione di trasformazione.

$$B_{x'} = B_x$$

Ricaviamo ora esplicitamente l'elemento (1, 1) della matrice risultante:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}F_{11}\Lambda_{11} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x \\ E_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta\gamma E_x & -\gamma E_x \\ \gamma E_x & \beta\gamma E_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)E_x \\ (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)E_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si ottiene così l'espressione della nuova componente di  $\vec{E}$  lungo  $\vec{x}$ , che rimane invariata rispetto la condizione iniziale.

$$E'_x = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)E_x = E_x$$

Analogamente si ricavano le altre componenti, che risultano essere

$$\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \end{cases}$$

Generalmente, se si considera una trasformazione nella quale il sistema  $K'$  si muove di una velocità  $\vec{v}$  con direzione arbitraria  $\vec{\beta}c$  rispetto il sistema di partenza  $K$ , le leggi assumono la forma

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}_{\perp}) \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}_{\perp}) \end{cases}$$

nella quale sono conservate sempre le componenti parallele al moto relativo dei sistemi, che avviene lungo  $\vec{\beta}$ .

Come conseguenza diretta di tali equazioni, si verifica che se in un sistema di riferimento K i quali campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono puramente elettrico o magnetico, ovvero in cui le rispettive componenti sono tra loro indipendenti, in sistemi inerziali differenti le componenti di tali campi sono spesso risultato di dipendenze reciproche.

## 2. Modifiche alla dinamica

**2.1. Particella libera.** Dalla fisica classica è ben noto che le leggi della dinamica sono invarianti per trasformazioni di Galilei. In questo paragrafo partiremo dalla dimostrazione di tale principio per ricavare poi una formulazione delle leggi della dinamica che sia invariante per trasformazioni di Lorentz. Per farlo prenderemo come esempio il caso di una particella libera di massa  $m$  che si muove di moto rettilineo uniforme.

2.1.1. *Dinamica classica.* Per il principio di minima azione le equazioni del moto di un sistema meccanico sono quelle che rendono minimo (o comunque stazionario) il valore dell'azione, ovvero una grandezza definita come:

$$A = \int \mathcal{L} dt$$

Nel caso di nostro interesse l'azione assume quindi la forma:

$$A = \int \frac{1}{2} m v^2 dt$$

Applicando una trasformazione di Galilei la nuova lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}v + v^2)$$

Tuttavia, nonostante la variazione della lagrangiana, le equazioni del moto rimangono invariate; per verificarlo è sufficiente dimostrare che entrambe le lagrangiane rendono stazionaria l'azione. L'azione calcolata con la nuova lagrangiana è:

$$\begin{aligned} A' &= \int \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m v \dot{x} + \frac{m v^2}{2} \right) dt = \\ &= \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt + \int m v \dot{x} dt + \int \frac{m v^2}{2} dt = \\ &= \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt + m v [x]_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{2} m v^2 [t]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

L'azione risultante è quindi composta dalla vecchia azione a cui vengono sommati due termini che non dipendono dalla traiettoria seguita, ma soltanto dalle condizioni ai tempi  $t_1$  e  $t_2$ , ovvero è semplicemente stata aggiunta una costante all'azione. Questo significa che se l'azione  $A$  è stazionaria anche l'azione  $A'$  lo è.

In alternativa avremmo potuto dimostrare che la nuova lagrangiana differiva dalla vecchia per la derivata totale di una funzione arbitraria delle coordinate e del tempo, ovvero:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F(x, t)$$

2.1.2. *Dinamica relativistica.* Mentre per trasformazioni di Galilei il tempo è un invariante, esso non lo è per le trasformazioni di Lorentz. Di conseguenza, per esprimere le leggi della dinamica in forma invariante, si dovrà scrivere la lagrangiana del sistema a partire da una quantità che rimane invariata sotto trasformazioni di Lorentz, ovvero la distanza spazio-temporale  $ds$ .

Nel caso di una particella libera che si muove di moto rettilineo uniforme, l'azione deve essere proporzionale alla distanza spazio-temporale percorsa dalla particella con una costante di proporzionalità incognita  $\alpha$ :

$$A = \alpha \int ds = \alpha \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = \alpha c \int dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

Ora è necessario verificare che  $A$  confluisce nell'azione galileiana nei casi in cui  $v \ll c$ ; per farlo sviluppiamo in serie l'azione

$$A = \alpha c \int dt \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{c^2} + O\left(\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^4\right) \right] \simeq \int (\alpha c - \frac{\alpha}{2c} \dot{x}^2 + \dots) dt$$

A questo punto è necessario fissare  $\alpha = -mc$  per ricondursi (a meno di una costante che non dipende da  $\dot{x}$ ) alla meccanica classica per i casi di bassa velocità. L'espressione ottenuta per l'azione, sostituendo  $\alpha$  nell'espressione precedente è quindi

$$A = -mc^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} dt$$

e ciò significa che la forma relativistica della lagrangiana della particella libera è  $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{x}/c)^2}$ . Ricaviamo ora la nuova forma dell'hamiltoniana:

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = mc^2 \frac{\dot{x}/c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} = m\gamma\dot{x}$$

Ricavando da questa relazione  $\dot{x}(P)$  e sostituendolo nella definizione di Hamiltoniana, svolgendo i dovuti passaggi algebrici si ottiene:

$$E = \mathcal{H} = \dot{x}P - \mathcal{L} = c\sqrt{P^2 + m^2c^2} \simeq mc^2 + \frac{P^2}{2m} - \frac{1}{8}\left(\frac{P}{m}\right)^4 + \dots$$

A questo punto bisogna evidenziare due importanti osservazioni:

Osservazione 1: Contrariamente a quanto accade in meccanica classica, in meccanica relativistica l'energia meccanica di una particella libera a riposo non risulta nulla, nell'espressione dell'energia compare infatti un contributo dovuto alla massa della particella pari a  $E = mc^2$ , questo portò per la prima volta ad ipotizzare una relazione di proporzionalità fra la massa di un corpo a riposo e la sua energia, tuttavia per dimostrare la validità di tale risultato sarà necessario ricorrere ad esperimenti che mettano in evidenza la trasformazione di massa in energia e viceversa.

Osservazione 2: Quando la velocità della particella tende alla velocità della luce il suo momento tende all'infinito; è infatti banale verificare che:

$$\lim_{\dot{x} \rightarrow c} P = \infty$$

Originariamente tale relazione era stata interpretata come una variazione di massa inerziale nel nuovo sistema di riferimento secondo la relazione  $m' = \gamma m$  dove  $m$  era la massa di riposo del corpo, ovvero la sua massa inerziale misurata in un sistema di riferimento in cui esso risultava

fermo, oggi invece si preferisce dire semplicemente che il momento di una particella dipende dalla velocità con la relazione  $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$ .

**2.2. Particella carica in campo elettromagnetico.** Si studia ora l'esempio di una particella di massa  $m$  e carica  $e$  che si muove in un campo elettromagnetico esterno, verificando le differenze che intercorrono fra le leggi del moto dedotte tramite meccanica Newtoniana e quelle dedotte tramite meccanica relativistica.

**2.3. Caso classico.** La lagrangiana del sistema in esame, già nota dalla meccanica lagrangiana per forze dipendenti dalla velocità, consiste nella differenza tra l'energia cinetica ed un potenziale dipendente dalla velocità un potenziale scalare  $\phi$  e un potenziale vettoriale  $\vec{A}$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + \frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}$$

Ci si chiede allora se per differenti possibili scelte dei potenziali caratteristici le relative lagrangiane del sistema siano equivalenti. Sappiamo infatti che il potenziale scalare è definito a meno di una costante scalare arbitraria, mentre il potenziale vettore a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria delle coordinate spaziali. Questo fa sì che esistano infinite lagrangiane riferite ad uno stesso sistema. Per eliminare questa ambiguità è necessario dimostrare che tutte queste lagrangiane portano alle medesime equazioni del moto.

Si considerano allora due coppie di potenziali  $(\phi_1, \vec{A}_1)$  e  $(\phi_2, \vec{A}_2)$  tali che siano valide le relazioni:

$$\begin{aligned}\phi_2 - \phi_1 &= k \\ \vec{A}_2 - \vec{A}_1 &= \vec{\nabla}\chi\end{aligned}$$

dove  $k = \text{const}$  e  $\chi = \chi(x, y, z)$ .

Quindi, andando a calcolare la differenza fra le due lagrangiane, risulta:

$$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = -e(\phi_2 - \phi_1) + \frac{e}{c}\vec{v} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = -ek + \frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\chi$$

Poichè la differenza fra i potenziali scalari, essendo una costante, ha derivata nulla, essa non influisce sulle equazioni del moto, le due lagrangiane si possono dunque considerare differenti per il solo fattore  $\frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\chi$ . Tuttavia si dimostra facilmente che:

$$\frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\chi = \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}$$

Le due lagrangiane si possono quindi considerare differenti per la sola derivata totale di una funzione arbitraria delle coordinate, come già detto in precedenza una tale differenza tra le lagrangiane non porta a variazioni nelle equazioni del moto del sistema. Quindi si è dimostrato che la scelta arbitraria dei potenziali non modifica le equazioni del moto ricavate tramite le equazioni di Eulero-Lagrange.

Si procede ora al calcolo dell'Hamiltoniana del sistema. Per prima cosa è necessario calcolare il valore del momento; il momento associato alla variabile  $i$ -esima avrà valore:

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = mv_i + \frac{e}{c}A_i$$

In termini vettoriali ciò equivale alla relazione:

$$\vec{P} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

Questo significa che la velocità espressa in funzione del momento è:

$$\vec{v} = \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) / m$$

Si può ora procedere con il calcolo vero e proprio dell'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = v_i p_i - \mathcal{L} = \vec{v} \cdot \vec{P} - \mathcal{L}$$

Sostituendo la velocità con la funzione del momento trovata si arriva infine all'espressione dell'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi$$

Questa rappresenta l'hamiltoniana di una particella carica in un campo elettromagnetico secondo la meccanica classica. Essa non comprende nessun effetto di tipo relativistico in quanto ricavata esclusivamente a partire dalle leggi della meccanica classica.

**2.4. Caso relativistico.** Vogliamo ora studiare il caso precedentemente descritto tenendo conto degli effetti dovuti al principio di relatività speciale. Per ricavare l'hamiltoniana di una particella relativistica in un campo elettromagnetico partiamo dall'azione di una particella relativistica libera già ricavata in precedenza:

$$A = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = -mc^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt$$

Per aggiungere gli effetti dovuti al campo elettromagnetico sul moto della particella è sufficiente sottrarre all'azione l'integrale del potenziale elettromagnetico, l'azione diventerà quindi:

$$\begin{aligned} A &= -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \\ &= -mc^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt - \int (e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}) dt = \\ &= \int \left[ -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right] dt \end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana che descrive il sistema è:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Ora si può procedere ricavando l'hamiltoniana del sistema. Anche in questo caso, per prima cosa, ricaviamo i momenti relativi ad ogni coordinata:

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{mc^2 (v_i/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} A_i$$

ossia

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

Esprimiamo ora la velocità in funzione del momento, dalla relazione precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} &= m\vec{v} \\ \Rightarrow \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \left(\frac{e}{c}\right)^2 &= m^2 \vec{v}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{m^2 + \frac{1}{c^2}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}$$

Sostituendo tale relazione nella formula di partenza si ottiene inoltre:

$$m\vec{v} = (\vec{v} - \frac{e}{c}\vec{A})\sqrt{1 - \frac{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{m^2c^2 + (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}} = \frac{mc(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})}{\sqrt{m^2c^2 + (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}}$$

Ora è possibile ricavare l'hamiltoniana come funzione delle coordinate e dei momenti sostituendo le relazioni appena ottenute nella sua espressione, si arriva quindi a scrivere:

$$\mathcal{H} = \vec{v} \cdot \vec{P} - \mathcal{L} = c\sqrt{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2} + e\phi$$

Abbiamo così ottenuto l'hamiltoniana di una particella carica in un campo elettromagnetico nel caso relativistico.

Ricordando la forma dell'hamiltoniana di una particella libera, ovvero:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}$$

Esiste una regola mnemonica detta *accoppiamento minimale* con la quale è possibile, a partire da tale forma, scrivere l'hamiltoniana della particella in qualsiasi condizioni di potenziale senza dover risalire ogni volta alla Lagrangiana.

L'accoppiamento minimale consiste nel sostituire nell'hamiltoniana di una particella libera il momento  $\vec{P}$  con  $\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}$  e la vecchia hamiltoniana  $\mathcal{H}$  con la nuova hamiltoniana  $\mathcal{H} + e\phi$ .

Un accoppiamento minimale è quindi esprimibile con la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} \vec{P} \longrightarrow \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \\ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} - e\phi \end{cases}$$

Dove  $\vec{P}'$  e  $\mathcal{H}'$  sono rispettivamente il momento e l'hamiltoniana della particella libera e  $\vec{P}$  e  $\mathcal{H}$  il momento e l'hamiltoniana della particella nel campo elettromagnetico.

**2.5. Un esempio particolare: campo magnetico uniforme.** Ora che conosciamo l'hamiltoniana di una particella carica di massa  $m$  e carica  $e$  immersa in un campo elettromagnetico sia nel caso relativistico che in quello classico, possiamo studiare un semplice caso particolare, ovvero quello di una particella che si muove in un campo magnetico costante e uniforme in assenza di campo elettrico.

Per semplificare i calcoli prendiamo l'asse  $z$  parallelo al campo magnetico; in queste condizioni il potenziale scalare e vettore hanno la seguente forma:

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B)$$

che corrispondono ai campi del caso che stiamo trattando. Procediamo ora con lo studio del moto del sistema in esame nel caso classico e nel caso relativistico così da mettere meglio in evidenza le differenti conclusioni a cui portano le due trattazioni.

Scriviamo prima di tutto le due hamiltoniane. E' facile dimostrare, in base alla forma generale dell'Hamiltoniana di una particella carica in un campo elettromagnetico, che nel caso particolare preso in esame le due hamiltoniane assumono la seguente forma:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = c\sqrt{(P_x + \frac{eB}{2c}y)^2 + (P_y - \frac{eB}{2c}x)^2 + P_z^2 + m^2c^2}$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{NR}} = \frac{1}{2m}[(P_x + \frac{eB}{sc}y)^2 + (P_y - \frac{eB}{2c}x)^2 + P_z^2]$$

Dove i simboli  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{H}_{\mathcal{NR}}$  indicano rispettivamente l'hamiltoniana relativistica e l'hamiltoniana non relativistica.

**2.6. Caso classico.** Iniziamo ora a ricavare le equazioni del moto utilizzando le equazioni di Hamilton partendo dal caso classico:

per quanto riguarda la coordinata  $z$  si ha:

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \Rightarrow P_z = \text{cost.}$$

La componente della velocità lungo l'asse  $z$  resta dunque invariata. Per le altre coordinate valgono invece le relazioni:

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{eB}{2mc}(P_y - \frac{eB}{2c}x)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\frac{eB}{2mc}(P_x + \frac{eB}{2c}y)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} = \frac{1}{m}(P_x + \frac{eB}{2c}y)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_y} = -\frac{1}{m}(P_y - \frac{eB}{2c}x)$$

Possiamo quindi scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_x - \frac{eB}{2c}y) = \dot{P}_x - \frac{eB}{2c}\dot{y} = \frac{eB}{mc}(P_y - \frac{eB}{2c}x) \\ \frac{d}{dt}(P_x + \frac{eB}{2c}y) = \dot{P}_x + \frac{eB}{2c}\dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_y - \frac{eB}{2c}x) = \dot{P}_y - \frac{eB}{2c}\dot{x} = -\frac{eB}{mc}(P_x + \frac{eB}{2c}y) \\ \frac{d}{dt}(P_y + \frac{eB}{2c}x) = \dot{P}_y + \frac{eB}{2c}\dot{x} = 0 \end{cases}$$

In base alla seconda equazione di ciascun sistema le grandezze  $P_x + \frac{eB}{2c}y$  e  $P_y + \frac{eB}{2c}x$  si mantengono costanti nel tempo. Di conseguenza possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$(110) \quad P_x = -\frac{eB}{2c}(y - y_0)$$

$$P_y = -\frac{eB}{2c}(x - x_0)$$

Sfruttando la prima equazione di ciascun sistema si può invece scrivere:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{S}_x = \frac{eB}{mc}\mathcal{S}_y \\ \frac{d}{dt}\mathcal{S}_y = -\frac{eB}{mc}\mathcal{S}_x \end{cases}$$

Dove  $\mathcal{S}_x = P_x + \frac{eB}{2c}y$  e  $\mathcal{S}_y = P_y - \frac{eB}{2c}x$ . Derivando ambo i membri della prima equazione e sostituendo  $\frac{d}{dt}\mathcal{S}_y$  si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\ddot{\mathcal{S}}_x = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2\mathcal{S}_x$$

Con lo stesso procedimento si può ottenere un'equazione del tutto analoga per  $\mathcal{S}_y$ :

$$\ddot{\mathcal{S}}_y = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2\mathcal{S}_y$$

Abbiamo così ottenuto due equazioni differenziali disaccoppiate che descrivono il moto del sistema. Utilizzando poi le relazioni (110) si può giungere a una coppia di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2x \\ \ddot{y} = -\left(\frac{eB}{mc}\right)^2y \end{cases}$$

Tali equazioni non sono altro che equazioni differenziali del moto armonico con frequenza  $\Omega = \frac{eB}{mc}$ . La particella si muove quindi su una traiettoria elicoidale di raggio fisso con una frequenza di ciclotrone pari alla frequenza di Larmor. Come si evince dall'espressione ricavata tale frequenza non dipende in alcun modo dalla velocità della particella.

**2.7. Caso relativistico.** Trattiamo ora lo stesso problema utilizzando la dinamica relativistica, per prima cosa notiamo che (come nel caso precedente) l'Hamiltoniana è una costante del moto, infatti:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$$

Per quanto riguarda la coordinata  $z$  vale ancora la relazione:

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = 0$$

Di conseguenza anche in questo caso la velocità lungo l'asse  $z$  resta costante, poichè:

$$\dot{z} = \frac{P_z c^2}{\mathcal{H}} = \text{cost.}$$

Ricaviamo ora le equazioni del moto relative alle coordinate  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} \dot{P}_x = \frac{c^2}{\mathcal{H}} \frac{eB}{2c} (P_y - \frac{eB}{2c}x) \\ \dot{P}_y = \frac{c^2}{\mathcal{H}} \frac{eB}{2c} (P_x + \frac{eB}{2c}y) \\ \dot{x} = -\frac{c^2}{\mathcal{H}} \frac{eB}{2c} (P_x + \frac{eB}{2c}y) \\ \dot{y} = \frac{c^2}{\mathcal{H}} \frac{eB}{2c} (P_y - \frac{eB}{2c}x) \end{cases}$$

Seguendo un procedimento del tutto analogo al caso precedente si arrivano a scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{S}_x = -\frac{c^2 eB}{\mathcal{H}c}\mathcal{S}_y \\ \frac{d}{dt}\mathcal{S}_y = -\frac{c^2 eB}{\mathcal{H}c}\mathcal{S}_x \end{cases}$$

In questo caso si avrà dunque un altro moto circolare uniforme di frequenza  $\Omega = \frac{c^2 eB}{\mathcal{H}c}$ , l'espressione della frequenza è quindi analoga alla precedente con la differenza che la massa della particella viene sostituita dal fattore  $\frac{\mathcal{H}}{c^2}$ . Essendo  $\mathcal{H}$  una costante del moto anche in questo caso il raggio della traiettoria elicoidale resta costante, tuttavia, diversamente dal caso precedente, la

frequenza dipende dalla velocità della particella (essa dipende infatti da  $\mathcal{H}$  che a sua volta dipende da  $\vec{v}$ ).

### 3. Conservazione del tetramomento

Possiamo definire una grandezza vettoriale, chiamata *quadrivettore impulso*, definita come il seguente quadrivettore:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{P} \right)$$

Come osservato nel capitolo sull'effetto Compton, nel caso di un sistema isolato il quadrivettore  $p^\mu$  si conserva nel tempo.

**3.1. Esempi di conservazione del tetramomento.** In questa sezione ci occuperemo di illustrare alcuni esempi riguardanti fenomeni fisici che coinvolgono la conservazione del tetramomento, essi costituiranno inoltre prove in sostegno della validità della proporzionalità fra massa ed energia di una particella a riposo.

**3.2. Urto fra due particelle nel centro di massa.** Consideriamo un urto tra due particelle di uguale energia e momenti uguali in modulo ma opposti in verso che si scontrano in un urto completamente anelastico unendosi in un'unica particella, il quadrivettore momento totale allora è:

$$p_1 + p_2 = \left( \frac{E}{c}, \vec{P} \right) + \left( \frac{E}{c}, -\vec{P} \right) = \left( \frac{2E}{c}, \vec{0} \right)$$

Il tetramomento della particella risultante dall'urto sarà esprimibile come:

$$p' = \left( \frac{E'}{c}, \vec{0} \right)$$

Dove  $E'$  è l'energia della particella che si forma dopo l'urto e si ha:

$$\frac{E'}{c} = \sqrt{P'^2 + M^2 c^2}$$

Dove  $P'$  e  $M$  sono rispettivamente il momento e la massa della nuova particella. Per la conservazione dell'energia si deve avere  $E' = 2E$ , quindi:

$$E' = 2c\sqrt{P^2 + m^2 c^2}$$

Essendo  $P' = 0$  si ha:

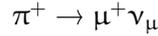
$$\left( \frac{E'}{c} \right)^2 = M^2 c^2$$

Sostituendo  $E'$  si ottiene:

$$M = 2\sqrt{\left(\frac{P}{c}\right)^2 + m^2} > 2m$$

La massa del corpo risultante è quindi maggiore della somma delle due masse. L'energia cinetica dei corpi ha contribuito dunque all'inerzia del corpo risultante, tale fenomeno costituisce quindi una prova a sostegno dell'equivalenza tra massa inerziale ed energia già ipotizzata nel capitolo precedente, tale proporzionalità tra massa inerziale ed energia prende il nome di *legge d'inerzia dell'energia*.

**3.3. Decadimento di un pione.** Esaminiamo il caso di un pione che decade in un muone e un neutrino muonico secondo il seguente processo di decadimento:



Ipotizzando che il pione sia a riposo nel momento del decadimento i tetramomenti delle particelle risultanti dovranno seguire la relazione:

$$\begin{pmatrix} m_\pi c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p^2 + m_\mu^2 c^2} \\ \vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{q^2 + m_\nu^2 c^2} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

Le masse in gioco sono:

- $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$
- $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$
- $m_\nu = 2 \text{ eV}/c^2$

Possiamo quindi considerare trascurabile la massa del neutrino, tuttavia in questo esempio continueremo a tenerla in considerazione. Siccome, per la conservazione del momento, possiamo considerare  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ , possiamo scrivere:

$$p^2 = \frac{E_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2 = \frac{E_\nu^2}{c^2} - m_\nu^2 c^2$$

Possiamo scrivere inoltre:

$$\begin{cases} E_\mu^2 - E_\nu^2 = (m_\mu^2 - m_\nu^2) c^4 \\ E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2 \end{cases}$$

Utilizzando entrambe le equazioni di questo sistema possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} E_\mu^2 - E_\nu^2 &= (E_\mu - E_\nu)(E_\mu + E_\nu) = (E_\mu - E_\nu) m_\pi c^2 = (m_\mu^2 - m_\nu^2) c^4 \\ \Rightarrow E_\mu - E_\nu &= \frac{m_\mu^2 - m_\nu^2}{m_\pi} c^2 \\ \Rightarrow E_\mu &= \frac{c^2}{2} m_\pi \left( 1 - \frac{m_\mu^2 - m_\nu^2}{m_\pi^2} \right) \end{aligned}$$

**3.4. L'esempio della navicella spaziale.** Ipotizziamo di avere una navicella spaziale di forma cilindrica nel vuoto e in assenza di potenziali, indichiamo con L la lunghezza della navicella, con A e B i punti che rappresentano i suoi estremi.

Se viene lanciato un impulso luminoso dal punto A in direzione del punto B tutta la navicella subirà un contraccolpo per via della conservazione del momento. Il fotone infatti porterà con sé un momento

$$|\vec{q}| = \frac{E}{c}$$

Dopo che il fascio è stato completamente assorbito da B la navicella perde l'impulso acquisito e il suo moto si arresta, nel frattempo però essa ha percorso una distanza

$$\Delta x = \frac{E}{(m_A + m_B)c} \cdot \frac{L}{c}$$

Tutto ciò è assurdo poichè in assenza di forze esterne il centro di massa del sistema deve mantenere il suo stato di quiete o moto.

In questo caso l'unico modo per fare sì che il centro di massa mantenga la sua posizione (e quindi che non venga infranta nessuna legge della dinamica) è ipotizzare che la massa delle pareti A e B sia variata, in particolare che la parete A abbia perso una quantità di massa  $\Delta m$  e B ne abbia acquistata una uguale quantità.

Cerchiamo ora di calcolare quanto dovrebbe valere tale  $\Delta m$  per lasciare inalterata la posizione del centro di massa.

Poniamo l'origine del sistema di riferimento nel punto B, quindi  $x_B = 0$  e  $x_A = L$ , allora il centro di massa sarà in posizione:

$$x_{CM} = \frac{x_B m_B + x_A m_A}{m_A + m_B}$$

Dopo lo scambio di radiazione invece si avrà:

$$\begin{aligned} x'_{CM} &= \frac{x'_B m'_B + x'_A m'_A}{m'_A + m'_B} = \frac{\Delta x (m_B + \Delta m) + (L + \Delta x)(m_A - \Delta m)}{m_A - \Delta m + m_B + \Delta m} \\ &= \frac{m_A L + \Delta x (m_A + m_B) - \Delta m L}{m_A + m_B} \end{aligned}$$

Per mantenere fissa la posizione del centro di massa e non infrangere le leggi della dinamica quindi è necessario che valga la condizione:

$$\Delta x (m_A + m_B) - \Delta m L = 0$$

ovvero:

$$\Delta m = \frac{\Delta x}{L} (m_A + m_B)$$

Sostituendo  $\Delta x = \frac{E}{(m_A + m_B)c} \cdot \frac{L}{c}$  si ottiene:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}$$

Affinchè resti valido il principio della dinamica per cui in assenza di forze esterne il centro di massa di un sistema mantiene il suo stato di quiete o moto, dobbiamo quindi assumere che la quantità di massa spostata sia dovuta all'energia  $E$  secondo la relazione ipotizzata nel capitolo sulla dinamica relativistica e di cui è stata fornita un'altra prova nell'esempio precedente.

Dobbiamo quindi assumere che la materia si manifesti sia come inerzia che come capacità di compiere un lavoro, ovvero come energia e che queste due grandezze siano legate dalla relazione di proporzionalità  $E = mc^2$ .

Tale relazione costituisce uno dei risultati più importanti della teoria della relatività ristretta ed è stato ampiamente verificato nel corso degli anni, osservando i fenomeni di decadimento radioattivo in cui una particella inizialmente ferma decade in altre particelle dotate di un'energia cinetica e la cui somma delle masse è inferiore alla massa della particella di partenza, come illustrato nell'esempio di decadimento del pione.

## CAPITOLO 7

### Appendici

#### 1. Costanti fondamentali

Per una lista più completa si veda [?] ottenibile anche via *internet* all'indirizzo <http://www-pdg.lbl.gov>.

velocità della luce	$c$	$299792458 \text{ m s}^{-1}$
costante di Planck	$h$	$6.626075 \times 10^{-34} \text{ J s}$
costante di Planck (ridotta)	$\hbar = h/2\pi$	$6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$
lunghezza d'onda di De Broglie	$h/p$	$1.240 \times 10^{-6} \text{ m (p = 1. eV/c)}$
carica elettronica	$e$	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
costante di struttura fine	$\alpha = e^2/\hbar c$	$1/137.0359895(61)$
fattore di conversione	$\hbar c$	$197.3270(1) \text{ MeV fm}$
massa elettronica	$m_e$	$0.51199906(15) \text{ MeV}/c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
massa protonica	$m_p$	$938.27231(28) \text{ MeV}/c^2 \approx 1836 m_e$
raggio di Bohr	$a = \hbar^2/m_e e^2$	$0.529177249(24) \text{ \AA}$
magnetone di Bohr	$\mu_B = e\hbar/m_e c$	$0.579 \times 10^{-10} \text{ MeV T}^{-1}$
raggio classico (elettrone)	$r_e = e^2/m_e c^2$	$0.282 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$
lunghezza d'onda Compton	$\hbar/m_e c$	$3.861 \cdot 593 \cdot 23(35) \times 10^{-13} \text{ m}$
lunghezza d'onda di De Broglie	$h/\sqrt{2m_e E}$	$12.3 \sqrt{E_0/E} \text{ \AA, } E_0 = 1 \text{ eV}$
dipolo magnetico (elettrone)	$\mu_e$	$1.0011596522 e\hbar/2m_e c$
costante di Rydberg	$Ry = \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2$	$13.605 \cdot 698 \cdot 1(40) \text{ eV}$
dipolo magnetico (protone)	$\mu_p$	$2.79 e\hbar/2m_p c$
dipolo elettrico (protone)		$(-4 \pm 6) \times 10^{-10} e \text{ fm}$
costante di Newton	$G_N$	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
massa di Planck	$\sqrt{\hbar c/G_N}$	$1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$
massa del Sole	$M_\odot$	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
raggio del Sole	$R_\odot$	$6.96 \times 10^5 \text{ km}$
raggio di Schwartzschild (Sole)	$\rho_S = 2G_N M_\odot/c^2$	$2.95 \text{ km}$
temperatura della CMB	$T_0$	$2.726 \pm 0.005 \text{ K}$
numero di Avogadro	$N_A$	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k$	$1.380658(12) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \approx 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
$1 \text{ fm} = 10^{-5} \text{ \AA} = 10^{-13} \text{ cm} \quad 1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-6} \text{ erg}$		

TABELLA 1. *Costanti fisiche utilizzate nel testo.*

#### 2. L'integrale d'azione nel caso Kepleriano

Si tratta di calcolare l'integrale

$$\oint dr \sqrt{2mE + 2mk/r - J_\phi^2/r^2}.$$

Si può cercare l'integrale sulle tabelle del Gradshteyn-Ryzhik, eq.2.266,2.267. È anche possibile calcolare l'integrale utilizzando la teoria delle funzioni analitiche. L'integrale è esteso a una curva che abbraccia il taglio della funzione polidroma che compare come integrando. Gli estremi dell'integrale sono dati dagli zeri del polinomio che compare sotto radice. Ma possiamo deformare il cammino in modo tale da portarlo ad una forma che abbraccia l'origine delle coordinate e si estende ad una circonferenza di raggio  $R$  che porteremo all'infinito, come mostrato in Fig.2. Per  $u = R e^{i\phi}$  con  $R \rightarrow \infty$  il termine  $\ell^2 u^2$  domina su tutto e nel limite si

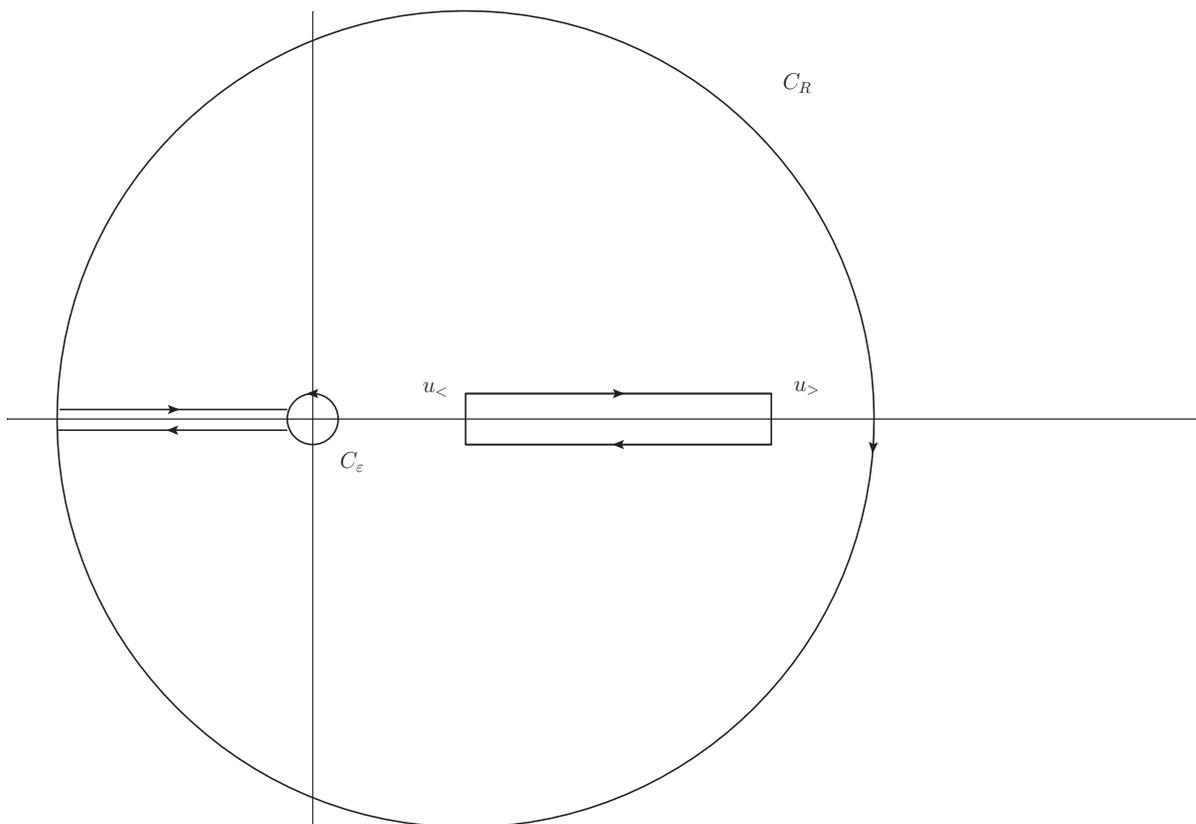
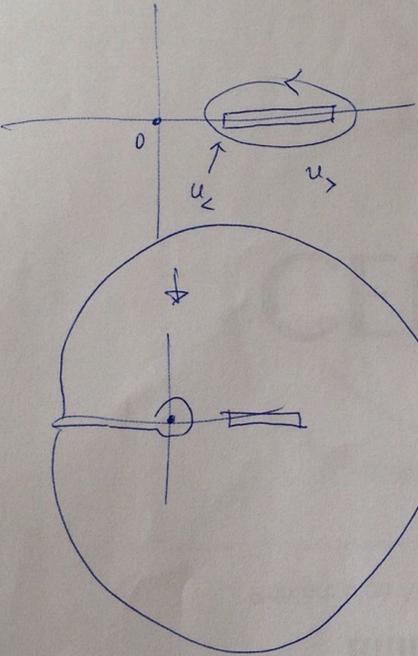


FIGURA 1. L'integrale d'azione per il moto di Kepler

trova semplicemente  $-\ell$ . I contributi dei due segmenti orizzontali che collegano  $C_R$  e  $C_\epsilon$  si cancellano a vicenda perchè lì la funzione è regolare, e il contributo del cerchietto intorno all'origine si ottiene con la formula di Cauchy come suggerito nella pagina di appunti manoscritti:

Integrale d'azione per  $V = -k/r$

$$\frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E + \frac{k}{r}) - \frac{l^2}{r^2}} dr \quad r = \frac{1}{u}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mu^2E + 2mk u - l^2 u^2} \frac{du}{u^2}$$


$u = Re^{i\varphi}$

$$\textcircled{\infty} \frac{i}{2\pi} \oint \frac{l du}{u}$$

$$= -l$$

$$\textcircled{0} \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left( \frac{d}{du} \sqrt{\quad} \right)_{u=0}$$

$$= i \frac{1}{2} \frac{2mk - 2l^2 u}{\sqrt{2mE}} = \frac{mk}{\sqrt{2mE}}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

In definitiva si ottiene

$$J_r = \frac{mk}{\sqrt{-2mE}} - J_\phi$$

Si noti che dal momento che le derivate  $\partial H / \partial J$  rappresentano le frequenze fondamentali del sistema, il fatto che l'Hamiltoniano dipende solo dalla somma  $J_r + J_\phi$  implica che le due frequenze coincidono e pertanto, come sappiamo, si hanno solo orbite chiuse. Il calcolo assume che  $E < 0$  in

corrispondenza alle orbite ellittiche. Se  $E > 0$  il moto è aperiodico e non sono definite le variabili di azione. Dalla relazione

$$E = -\frac{mk^2}{(J_r + J_\phi)^2}$$

si può ricavare la formula di Balmer inserendo  $k = e^2$  e applicando la regola di Bohr  $J_r = n_r \hbar$ ,  $J_\phi = n_\phi \hbar$ ; il valore dei livelli energetici dipende solo dalla somma  $n = n_r + n_\phi$  che viene chiamato “*numero quantico principale*”

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

Dal punto di vista dell’invarianza adiabatica, nel caso gravitazionale  $k = G_N M_\odot m$ , si può anche direttamente concludere che se la massa del Sole variesse lentamente nel tempo, l’energia di un pianeta varierebbe in modo che  $E/M_\odot^2$  si mantenga costante. Ciò significa che se la massa  $M_\odot$  dovesse aumentare, l’energia di legame pure aumenterebbe proporzionalmente al quadrato della massa del Sole.

## Indice analitico

### Symbols

$F_{\mu\nu}$ .....	102
$M_{\odot}$ , massa del Sole .....	117
$R_{\odot}$ , raggio del Sole .....	117
$\alpha$ , costante di struttura fine .....	117
Å, Ångstrom .....	117

### A

accoppiamento minimale .....	111
adiabatici	
invarianti .....	24

### B

Bohr	
il modello di .....	36
magnetone di .....	117
raggio di .....	117
Boltzmann	
costante di .....	117

### C

Calcolo tensoriale .....	99
carica	
elettronica .....	117
Compton	
effetto .....	53
lunghezza d'onda .....	8, 117
Conservazione dell'energia .....	16
controvariante	
tensore .....	99
Corpo nero .....	55
costante	
di Boltzmann .....	117
di Newton .....	117
di Planck .....	117
di Rydberg .....	117
di struttura fine .....	9, 117
Costante di struttura fine .....	9
costanti fisiche .....	117
Costanti fondamentali .....	117
covariante	
tensore .....	99

### D

De Broglie .....	44
lunghezza d'onda .....	10
lunghezza d'onda di .....	117
Dinamica relativistica .....	107
dipolo	
elettrico .....	117
magnetico .....	117

### E

effetto Compton .....	8
elettrone	
carica .....	117
dipolo elettrico .....	117
dipolo magnetico .....	117
massa .....	117
Equazione	
della catenaria .....	15
Equazioni di Maxwell .....	103

### F

Formula di Balmer .....	9
-------------------------	---

### H

Hamilton–Jacobi	
Equazione di .....	23
Heisenberg .....	49
disuguaglianza di .....	50

### I

Inerzia dell'energia .....	114, 115
invarianti adiabatici .....	24

### L

Lunghezza d'onda Compton .....	8
Lunghezza d'onda di De Broglie .....	10

### M

massa	
di Planck .....	117

## N

Newton  
costante di ..... 117

## P

Particella in campo e.m. .... 109  
Planck  
costante di ..... 117  
massa di ..... 117  
potenziale  
di Coulomb ..... 31  
principi variazionali ..... 13  
principio  
di Eulero-Lagrange ..... 14  
d'azione ..... 14  
di Maupertuis ..... 14, 17  
Principio di indeterminazione ..... 50  
Problemi ..... 14, 19, 22

## R

raggio  
di Bohr ..... 117  
di Schwarzschild ..... 117  
Raggio di Bohr ..... 10  
Raggio di Thompson dell'elettrone ..... 8  
regole di quantizzazione ..... 36  
Rutherford  
esperimento di ..... 27  
formula di ..... 33  
Rydberg  
costante di ..... 117

## S

Schwarzschild  
raggio di ..... 117  
sezione d'urto ..... 31

## T

Temperatura della CMB ..... 117  
Tensore elettromagnetico ..... 99  
Tensori ..... 99  
tetramomento ..... 114  
Trasformazioni di Lorentz  
per il campo e.m. .... 105

## U

urto anelastico ..... 114

## V

velocità  
della luce ..... 117  
di gruppo ..... 42

