

LEZIONI DI TEORIA DEI GRUPPI PER FISICI

ENRICO ONOFRI

INDICE

1. <b>Gruppi finiti</b>	3
1.1. Definizioni e teoremi fondamentali	3
1.2. Rappresentazioni	3
1.3. Rappresentazioni indotte	8
2. Applicazione alle vibrazioni molecolari	13
3. <b>Gruppi di Lie</b>	19
3.1. Gruppi di trasformazioni	19
3.2. Struttura di gruppo di Lie	19
3.3. L'intorno dell'identità: l'algebra di Lie	23
3.4. Rappresentazione aggiunta (I)	29
3.5. Gruppi e algebre semplici	30
3.6. Rappresentazioni lineari	31
3.7. Rappresentazione aggiunta (II)	36
3.8. Metrica di Killing	37
3.9. Sottoalgebre di Cartan	39
3.10. Lo spazio delle radici	41
3.11. La metrica di Cartan	42
3.12. Il gruppo di Weyl	43
3.13. Diagrammi di Young	51
3.14. Prodotti diretti di IRREP's	53
4. Eightfold way	63
4.1. $\mathfrak{su}(3)$	63
4.2. $\mathfrak{su}(4)$	65
4.3. $\mathfrak{su}(N)$	68
5. Sviluppi	70
5.1. Teorema di Serre	70
5.2. L'algebra $\mathfrak{so}(5) \equiv \mathfrak{sp}(2)$	71
5.3. L'algebra $\mathfrak{G}_2$	72
5.4. L'algebra $\mathfrak{so}(6)$	74
Indice analitico	77

---

*Date:* A.A. 2010–2011.

Questo documento è stato preparato in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, nello stile `amsart`, utilizzando i packages `amsthm`, `bbm`, `fancybox`, `fancyvrb`, `MnSymbol`, `makeidx`, `mathtools`, `fancyhdr`; tutte le figure sono state realizzate utilizzando il software libero `Jaxodraw` (D. Binosi e L. Theussl, *Comp.Phys.Commun.* 161 (2004) 76–86.)



## 1. Gruppi finiti

**1.1. Definizioni e teoremi fondamentali.** Per questa prima parte si veda un testo tradizionale quale **M. Hamermesh** [[Ham62]]. In alternativa, per una presentazione più in stile moderno da matematico (ma con una ottima attenzione per la applicazioni alla Fisica) si veda il testo di **S. Sternberg**, *Group Theory and Physics* [[Ste94]].

**1.2. Rappresentazioni.** Sia  $\mathcal{G}$  un gruppo finito e  $\mathcal{M}(n)$  l'insieme delle matrici complesse  $n \times n$ . Un map  $\mathcal{D} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$  è detto una *rappresentazione lineare* del gruppo se risulta soddisfatta la condizione

$$\mathcal{D}(a) \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \circ b)$$

essendo  $\circ$  l'operazione di composizione di  $\mathcal{G}$ . In particolare deve valere  $\mathcal{D}(e) = \mathbf{1}_n$  (la matrice unità) e  $\mathcal{D}(a^{-1}) = \mathcal{D}(a)^{-1}$ .

**1.2.1. Esempio.** Per  $\mathcal{G} = S^3$  (permutazioni su 3 elementi) si ha una rappresentazione in  $\mathcal{M}(2)$  data da

$$\mathcal{D}(r) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(s_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essendo  $r$  la permutazione ciclica (123) e  $s_3$  lo scambio (12). La rappresentazione si può identificare con la realizzazione di  $S^3$  in termini delle trasformazioni di simmetria del triangolo equilatero i cui vertici sono numerati da 1 a 3 e la permutazione ciclica coincide con la rotazione in senso antiorario di un angolo  $2\pi/3$ . La rappresentazione  $\mathcal{D}(a)$  per gli altri elementi si ricostruisce facilmente tenendo conto che  $r \circ s_3 \circ r^{-1} = s_1 = (23)$ ,  $r^{-1} \circ s_3 \circ r = s_2 = (13)$ , etc. Una caratteristica importante di una rappresentazione lineare è la traccia

$$(1) \quad \chi(a) = \text{Tr}[\mathcal{D}(a)]$$

che viene definita come *il carattere* della rappresentazione. Il carattere risulta funzione solo della classe di equivalenza cui appartiene l'elemento del gruppo. Infatti la traccia è invariante per trasformazioni di similitudine e quindi

$$(2) \quad \chi(b^{-1} \circ a \circ b) = \chi(a).$$

Naturalmente si potrebbero definire altre quantità caratteristiche della classe, per completezza si potrebbero considerare tutti i polinomi invarianti definiti da

$$(3) \quad \det(\lambda \mathbf{1}_n - \mathcal{D}(a)) = \sum_{i=0}^n p_n(a) \lambda^i.$$

Tuttavia, si sa che i polinomi così costruiti si possono esprimere in termini delle tracce di potenze successive di  $\mathcal{D}(a)$ . Ma queste sono poi espresse in termini di semplici tracce di altri elementi del gruppo. Quindi la restrizione alla traccia non costituisce una limitazione di generalità. Il carattere della rappresentazione identifica quest'ultima a meno di trasformazioni di similitudine.

**1.2.2. Rappresentazioni irriducibili.** Una rappresentazione lineare  $\mathcal{D} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}(n)$   $n$ -dimensionale si dice *irriducibile* se esiste una base in cui la struttura delle matrici rappresentative di tutti gli elementi del gruppo si può mettere nella forma a blocchi

$$(4) \quad \mathcal{D}(g) = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{D}_1(g) & X(g) \\ \hline \mathbb{0} & \mathcal{D}_2(g) \end{array} \right)$$

dove  $X$  è una matrice arbitraria. Si verifica immediatamente che  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  sono entrambe rappresentazioni di  $\mathcal{G}$ . Una rappresentazione è *irriducibile* se non esiste alcuna base in cui sia possibile decomporre a blocchi in questo modo tutte le matrici rappresentative. Le rappresentazioni irriducibili (IRREP) sono gli elementi primari in termini dei quali si costruiscono tutte le rappresentazioni. La teoria dei gruppi finiti mostra come le IRREPS sono in numero finito, *pari al numero delle classi di equivalenza* del gruppo.

Se il blocco  $X$  è zero, la rappresentazione si dice *completamente riducibile*. Per i gruppi finiti tutte le rappresentazioni sono completamente riducibili.

Si può riformulare la definizione in termini indipendenti dalla base nello spazio della rappresentazione dicendo che *una rappresentazione è riducibile se esiste un sottospazio invariante sotto l'azione del gruppo*. Secondo l'Eq.(4), il sottospazio dei vettori del tipo  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  è invariante:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) & | & X(g) \\ \hline \mathbb{0} & | & \mathcal{D}_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

1.2.3. *Rappresentazioni unitarie.* Nelle applicazioni alla meccanica quantistica si è interessati alle rappresentazioni dei gruppi di simmetria in termini di matrici unitarie. Per questo lo spazio in cui si realizza la rappresentazione deve essere dotato di una metrica Hermitiana e le matrici  $\mathcal{D}(g)$  devono essere unitarie. Una rappresentazione unitaria o è irriducibile o è completamente riducibile. Per i gruppi finiti si vede facilmente che ogni rappresentazione lineare è equivalente a una rappresentazione unitaria. Infatti, sia  $\langle x|y \rangle$  il prodotto scalare Hermitiano e ammettiamo che  $\mathcal{D}$  non sia unitaria. Modifichiamo allora il prodotto scalare come segue;

$$(5) \quad \langle x|y \rangle = \sum_{h \in \mathcal{G}} (\mathcal{D}(h)x, \mathcal{D}(h)y)$$

Calcoliamo ora  $\langle \mathcal{D}(g)x | \mathcal{D}(g)y \rangle$ . Si trova

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}(g)x | \mathcal{D}(g)y \rangle &= \sum_{h \in \mathcal{G}} (\mathcal{D}(h)\mathcal{D}(g)x, \mathcal{D}(h)\mathcal{D}(g)y) \\ &= \sum_{h \in \mathcal{G}} (\mathcal{D}(h \circ g)x, \mathcal{D}(h \circ g)y) = \sum_{g \in \mathcal{G}} (\mathcal{D}(g)x, \mathcal{D}(g)y) \\ &= \langle x|y \rangle \end{aligned}$$

Il punto è che mentre  $h$  percorre tutta la lista degli elementi del gruppo,  $h \circ g$  percorre la riga della tavola di moltiplicazione del gruppo corrispondente a  $g$  e questa non è altro che una permutazione della stessa lista. Questo argomento non è generalizzabile a gruppi infiniti.

1.2.4. *Lemmi di Schur.* Schur<sub>1</sub>: Siano  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  due rappresentazioni irriducibili del gruppo  $\mathcal{G}$  che agiscono in due spazi lineari  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$ . Sia  $\mathcal{T} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$  tale che

$$(6) \quad \forall g \in \mathcal{G} : \mathcal{T} \mathcal{D}_1(g) = \mathcal{D}_2(g) \mathcal{T}$$

Allora o le due rappresentazioni sono equivalenti (cioè  $\mathcal{T}$  è invertibile) oppure  $\mathcal{T}$  è identicamente nullo.

Dim.: sia  $\mathcal{N} = \ker(\mathcal{T})$  il sottospazio di  $\mathcal{V}_1$  che viene mappato sul vettore nullo di  $\mathcal{V}_2$ .  $\mathcal{N}$  è un sottospazio invariante rispetto a  $\mathcal{D}_1$  e dato che  $\mathcal{D}_1$  è irriducibile non può che essere tutto lo spazio  $\mathcal{V}_1$  (nel qual caso  $\mathcal{T}$  è identicamente nullo), oppure il sottospazio vuoto nel qual caso  $\mathcal{T}$  è invertibile e la sua immagine  $\mathcal{T}\mathcal{V}_1$  è tutto  $\mathcal{V}_2$ . Quindi le due rappresentazioni, in questo secondo caso, sono equivalenti.

Schur<sub>2</sub>: Sia  $\mathcal{D}$  una rappresentazione irriducibile di  $\mathcal{G}$  e sia  $\mathcal{T}$  un operatore lineare che commuta con tutti i rappresentativi  $\mathcal{D}(g)$ . Allora  $\mathcal{T}$  è un multiplo dell'identità.

Dim.: l'operatore  $\mathcal{T}$  ha almeno un autovalore  $t$  e il sottospazio che appartiene a  $t$  è invariante rispetto all'azione del gruppo. Dato che non può essere il sottospazio vuoto deve essere l'intero spazio, e cioè  $\mathcal{T} = t \mathbf{1}$ .

1.2.5. *Relazioni di ortogonalità.* Un'applicazione immediata dei lemmi di Schur è costituita dalle *relazioni di ortogonalità* per gli elementi di matrice delle rappresentazioni irriducibili. Siano  $\{\mathcal{D}^{(\mu)}, \mu = 1, 2, \dots, r\}$  rappresentazioni irriducibili di  $\mathcal{G}$  a due a due inequivalenti. Consideriamo una qualunque di queste ( $\mathcal{D}^{(\mu)}$ ) e costruiamo l'operatore

$$A = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(\mu)}(g) X \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1})$$

in corrispondenza a una qualunque operatore  $X$ . Si verifica facilmente che l'operatore  $A$  rientra nell'ipotesi del lemma Schur<sub>2</sub> e quindi  $A$  è un multiplo dell'identità. Infatti

$$\mathcal{D}^{(\mu)}(g') A = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(\mu)}(g' \circ g) X \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) = \sum_{h \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(\mu)}(h) X \mathcal{D}^{(\mu)}(h^{-1} \circ g') = A \mathcal{D}^{(\mu)}(g')$$

Ne segue

$$(7) \quad \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(\mu)}(g) X \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) = \lambda \mathbf{1}$$

Scegliamo una base ortonormale  $|i\rangle$  e per  $X$  prendiamo un proiettore  $X = |i\rangle \langle j|$ . Allora la relazione Eq.(7) diviene

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle \langle j| \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) = \lambda \mathbf{1}$$

e prendendo l'elemento di matrice  $(k, l)$  si trova

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \langle k | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle \langle j| \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) |l\rangle = \lambda \delta_{kl}$$

Ora sommiamo su  $k = l$ : la completezza ci dà  $\sum_g \langle j | \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle = \langle i | j \rangle = \#(\mathcal{G}) \delta_{ij}$ , mentre a destra dell'uguaglianza abbiamo  $d_\mu \lambda$ , essendo  $d_\mu$  la dimensione della rappresentazione  $d_\mu = \dim(\mathcal{D}^{(\mu)})$ . In definitiva vale la relazione

$$(8) \quad \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \langle k | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle \langle j | \mathcal{D}^{(\mu)}(g^{-1}) |l\rangle = \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{d_\mu}$$

Se poi consideriamo due rappresentazioni non equivalenti  $\mathcal{D}^{(\mu)}$  e  $\mathcal{D}^{(\nu)}$ , la stessa costruzione (applicando Schur<sub>1</sub>) ci dà

$$\frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \langle k | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle \langle j | \mathcal{D}^{(\nu)}(g^{-1}) |l\rangle = 0$$

Da notare che senza sacrificare in generalità possiamo assumere che le rappresentazioni siano unitarie, nel qual caso le relazioni finora esaminate assumono la forma

$$(9) \quad \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \langle k | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) |i\rangle \overline{\langle l | \mathcal{D}^{(\nu)}(g) |j\rangle} = \frac{\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{\mu\nu}}{d_\mu}$$

Questa relazione si può interpretare dicendo che gli elementi di matrice delle rappresentazioni unitarie irriducibili costituiscono un insieme di vettori ortogonali nello spazio delle funzioni  $\mathcal{F} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$  in cui si scelga il prodotto interno nel modo più naturale

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

Da qui la denominazione *relazioni di ortogonalità* per il risultato appena ricavato.

Una forma un pó più generale si trova facilmente prendendo vettori arbitrari nello spazio delle due rappresentazioni:

$$\frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{g \in \mathcal{G}} \langle \psi_1 | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \mathcal{D}^{(\nu)}(g^{-1}) | \psi_2 \rangle = \frac{1}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$$

1.2.6. *Caratteri.* Dall'Eq.(9) si possono ricavare relazioni analoghe per i caratteri delle rappresentazioni. È sufficiente sommare gli elementi diagonali nell'Eq.(9) per ottenere

$$\frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{i=k} \sum_{j=l} \langle k | \mathcal{D}^{(\mu)}(g) | i \rangle \overline{\langle l | \mathcal{D}^{(\nu)}(g) | j \rangle} = \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\mu)}(g) \overline{\chi^{(\nu)}(g)} = \delta_{\mu\nu}$$

Dunque i caratteri delle rappresentazioni irriducibili costituiscono funzioni ortogonali nello spazio delle funzioni costanti sulle classi di equivalenza. Se indichiamo con  $m_\alpha$  il numero di elementi che appartengono alla classe  $C_\alpha$ , allora le relazioni di ortogonalità per i caratteri si possono mettere nella forma

$$(10) \quad \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{\alpha} m_\alpha \chi_\alpha^{(\mu)} \overline{\chi_\alpha^{(\nu)}} = \delta_{\mu\nu}$$

Nel caso di  $S^3$  si ha ad esempio la tabella dei caratteri seguente

$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	2	-1	0
$\chi_3$	1	1	-1

Tenendo conto che in questo caso  $m_\alpha = 1, 2, 3$  e  $\#\mathcal{G} = 6$  si può facilmente controllare l'ortogonalità della matrice dei caratteri:

$$1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 4 + 2 \times 1 + 0 \times 1 = 6$$

1.2.7. *Analisi di rappresentazioni riducibili.* Se  $\mathcal{D}$  è una rappresentazione riducibile, si possono sfruttare le relazioni di ortogonalità per analizzarla in termini di componenti irriducibili. Sia ad es.  $\mathcal{D} = \sum^{\oplus} a_\mu \mathcal{D}^{(\mu)}$  essendo  $a_\mu$  la molteplicità (quante volte cioè compare la rappresentazione irriducibile nella decomposizione di  $\mathcal{D}$ ). Allora chiaramente

$$\chi = \text{Tr}[\mathcal{D}] = \sum a_\mu \chi^{(\mu)}$$

e applicando la relazione (10) si trova

$$(11) \quad a_\mu = \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{\alpha} n_\alpha \chi_\alpha \overline{\chi_\alpha^{(\mu)}}$$

Inoltre si ha

$$\frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{\alpha} n_\alpha |\chi_\alpha|^2 = \sum_{\mu} a_\mu^2$$

Se si trova ad es.  $\frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{\alpha} n_\alpha |\chi_\alpha|^2 = 1$  questo implica che la rappresentazione è irriducibile.

⚡. Dato che il numero di vettori ortonormali non può superare la dimensione dello spazio e dato che la dimensione dello spazio delle funzioni definite su un gruppo finito è data dall'ordine del gruppo, si ottiene la disuguaglianza

$$\sum_{\mu} a_\mu^2 \leq \#\mathcal{G}$$

In realtà se si tiene conto di **tutte** le IRREP's vale il segno di uguaglianza.

◊. Le relazioni di ortogonalità, unite alle condizioni che il numero di IRREP's coincide con il numero di classi, pone vincoli stretti sulla tabella dei caratteri Ad es. nel caso di  $S^3$  sapendo che ci sono senz'altro due rappresentazioni monodimensionali (la banale e quella che assegna alla permutazione il suo indice, cioè  $\pm 1$  a seconda che si tratti di una permutazione pari o dispari) si trova subito che la terza rappresentazione irriducibile deve avere carattere  $2, -1, 0$ . (Dimostrarlo per esercizio).

1.2.8. La rappresentazione regolare. Sia  $\mathcal{C}$  lo spazio delle funzioni definite sul gruppo  $\mathcal{G}$  a valori complessi:

$$f \in \mathcal{C} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$$

$\mathcal{C}$  è uno spazio lineare di dimensione  $\#(\mathcal{G})$ . Si può definire una rappresentazione (detta "regolare") come segue:

$$(\mathcal{D}^{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1} \circ h), \forall g, h \in \mathcal{G}.$$

È semplice calcolare il carattere della rappresentazione regolare. Pensando a  $f$  come a un vettore di dimensione  $n = \#(\mathcal{G})$  (dove  $g_1 = e$  è l'identità del gruppo)

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} f(g_1) \\ f(g_2) \\ f(g_3) \\ \dots \\ f(g_n) \end{pmatrix}$$

l'azione di  $\mathcal{D}^{\text{reg}}$  consiste nel permutare le componenti di  $f$  ed è quindi rappresentabile con una matrice di permutazione (ad es.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

tale che non ci sono due elementi non nulli nella stessa riga o nella stessa colonna e lungo la diagonale si hanno elementi uguali a uno soltanto per l'identità (in quanto non esistono punti fissi nell'applicazione  $a \circ b \rightarrow c$ ). Dunque il carattere è semplicemente

$$\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} \#(\mathcal{G}) & g = e \\ 0 & g \neq e \end{cases}$$

Si ha perciò che la rappresentazione regolare è riducibile (la somma dei quadrati dei caratteri è maggiore di  $\#(\mathcal{G})$ ) e la sua analisi in termini di IRREP's si ottiene immediatamente applicando le formule di ortogonalità

$$(\chi^{(\mu)}, \chi^{\text{reg}}) = \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{\text{reg}}(g) = \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \chi^{(\mu)}(e) \#(\mathcal{G}) = d_\mu$$

ossia ogni rappresentazione irriducibile  $\mathcal{D}^{(\mu)}$  è contenuta nella rappresentazione regolare con molteplicità pari alla sua dimensione. Ciò implica allora

$$(12) \quad \boxed{\sum_{\mu} d_{\mu}^2 = \#(\mathcal{G})}.$$

Un caso più generale è quello di una rappresentazione definita utilizzando un insieme  $M$  su cui agisce il gruppo; per ogni funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  si definisce la rappresentazione

$$(\mathcal{D}(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

Per  $M = \mathcal{G}$  si ha la rappresentazione regolare. Il carattere della rappresentazione è in questo caso

$$\chi(g) = \#(\text{FP}(g)) = \text{numero di punti fissi di } g$$

Ad es. sia  $M = \{1, 2, 3\}$  e l'azione del gruppo  $S^3$  sia la permutazione sui tre elementi. Chiaramente  $\chi = (3, 0, 1)$  rispettivamente per la classe dell'identità, delle permutazioni cicliche e degli scambi (ij). La rappresentazione è riducibile  $((9 + 0 + 3 \times 1)/6 = 2)$  e si decompone nei caratteri irriducibili  $(3, 0, 1) = (1, 1, 1) + (2, -1, 0)$ . Una generalizzazione interessante è costituita dalle *rappresentazioni indotte* (vedi sezione 1.3). Queste portano a una formulazione del tipo

$$(\mathcal{D}(g)f)(x) = \rho(g, x) (f(g^{-1}x))$$

dove la funzione  $\rho$ , detta genericamente un *moltiplicatore*, deve soddisfare a un vincolo che i matematici chiamano *di cociclo*. Questo vincolo deriva dalla condizione di gruppo

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(g_1)\mathcal{D}(g_2)f)(x) &= \rho(g_1, x) (\mathcal{D}(g_2)f)(g_1^{-1}x) \\ &= \rho(g_1, x) \rho(g_2, g_1^{-1}x) f(g_2^{-1} \circ g_1^{-1}x) \\ &= \rho(g_1 \circ g_2, x) f((g_1 \circ g_2)^{-1}x) \end{aligned}$$

La condizione è pertanto

$$\rho(g_1, x) \rho(g_2, g_1^{-1}x) = \rho(g_1 \circ g_2, x) .$$

La teoria delle rappresentazioni indotte insegna a come costruire i moltiplicatori in accordo con la relazione di cociclo.

**1.3. Rappresentazioni indotte.** Si tratta di una tecnica che permette del tutto in generale di costruire rappresentazioni di un gruppo  $\mathcal{G}$  a partire da quelle di un sottogruppo  $\mathcal{H}$ . Sia  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \text{GL}(V)$  una rappresentazione lineare del sottogruppo  $\mathcal{H}$  nello spazio lineare  $V$  avente dimensione  $d$ . Si costruisce un insieme che è noto come *fibrato vettoriale omogeneo* (ma qui non è il caso di approfondire): si consideri il prodotto cartesiano  $M = \mathcal{G} \times V$ . Su  $M$  si fa agire il sottogruppo  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{T}_h(g, v) = (g h^{-1}, \lambda(h)v) , \quad h \in \mathcal{H} .$$

Al variare di  $h$  in  $\mathcal{H}$  si riempie un sottoinsieme in  $M$  che è detta *l'orbita* della mappa  $\mathcal{T}$  che contiene  $(g, v)$ . Si definisce poi  $\mathcal{E}_\lambda$  come lo spazio di tutte le orbite, cioè  $\mathcal{E}_\lambda$  si ottiene da  $\mathcal{G} \times V$  identificando i punti di  $M$  che appartengono a una stessa orbita; lo spazio  $\mathcal{E}_\lambda$  è dato perciò dall'insieme di punti  $(g, v)$  modulo l'identificazione

$$(13) \quad (g h, v) \sim (g, \lambda(h)v) .$$

La relazione (13) rappresenta una *relazione di equivalenza* e perciò lo spazio  $\mathcal{G} \times V$  risulta suddiviso in classi disgiunte, il cui insieme indichiamo appunto con  $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{G} \times V / \sim$ . Il gruppo  $\mathcal{G}$  agisce su  $\mathcal{E}_\lambda$  nel modo più naturale

$$g_1(g, v) = (g_1 g, v) .$$

Notiamo che la regola (13) fa sí che se fissiamo un vettore  $v_g$  in corrispondenza a un elemento  $g \in \mathcal{G}$ , allora risultano fissati i valori di  $v$  anche in corrispondenza a tutto il coset di  $\mathcal{H}$  che contiene  $g$ . Si dice una *sezione* di  $\mathcal{E}_\lambda$  un sottoinsieme di  $\mathcal{E}_\lambda$  che si ottiene scegliendo un elemento di  $V$  in corrispondenza ad ogni  $g \in \mathcal{G}$  rispettando la condizione posta dall'Eq.(13). Si può pensare a una sezione di  $\mathcal{E}_\lambda$  come assegnata da una funzione  $s(g)$

$$s : \mathcal{G} \rightarrow V$$



che soddisfi alla condizione

$$(14) \quad s(g h) = \lambda(h) s(g)$$

ossia  $s \circ h = \lambda(h) s$ . L'insieme delle sezioni di  $\mathcal{E}_\lambda$  è denotato con  $\Gamma(\mathcal{E}_\lambda)$  e costituisce uno spazio lineare. Immaginiamo ora di scegliere un elemento  $g_x \in \mathcal{G}$  per ogni coset  $x \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ . Allora una sezione è definibile assegnando la funzione  $s$  sull'insieme di elementi  $g_x$  senza restrizioni e si estende a tutto  $\mathcal{G}$  utilizzando la Eq.(14); una sezione è cioè individuata da un insieme  $\{(x, s(x)) \mid x \in \mathcal{G}/\mathcal{H}\}$ . Possiamo ora esplicitare come agisce il gruppo  $\mathcal{G}$  su  $\Gamma(\mathcal{E}_\lambda)$ :

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_g(x, s(x)) &\equiv \mathbf{U}_g(g_x, s(g_x)) = (g g_x, s(g_x)) = (g g_x g_{g_x}^{-1} g g_x, s(g_x)) = \\ &(g g_x, \lambda(g_{g_x}^{-1} g g_x) s(g_x)) \equiv (g x, \lambda(g_{g_x}^{-1} g g_x) s(x)), \end{aligned}$$

(notiamo che ciò è legittimo dal momento che  $g_{g_x}^{-1} g g_x$ , su cui valutiamo  $\lambda$ , appartiene ad  $\mathcal{H}$ ). Quindi la sezione  $\mathbf{U}_g s$  assume in  $g x$  il valore che  $s$  assume in  $x$  moltiplicato per la matrice  $\lambda(g_{g_x}^{-1} g g_x)$  ovvero esplicitamente

$$(\mathbf{U}_g s)(g x) = \lambda(g_{g_x}^{-1} g g_x) s(x);$$

ridefinendo l'argomento di  $s$  si trova infine

$$(16) \quad (\mathbf{U}_g s)(x) = \lambda(g_x^{-1} g g_{g^{-1}x}) s(g^{-1}x)$$

La rappresentazione  $\mathbf{U}_g$  di  $\mathcal{G}$  nello spazio  $\Gamma(\mathcal{E}_\lambda)$  si dice *la rappresentazione indotta*  $\lambda \uparrow \mathcal{G}$  o brevemente  $\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}$ , ed ha dimensione

$$\dim(\mathbf{U}_g) \equiv \dim(\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}) = d \frac{\#\mathcal{G}}{\#\mathcal{H}},$$

essendo  $d = \dim(V)$ . Osserviamo che anche se in questo momento stiamo considerando gruppi finiti, questa costruzione, con opportune modifiche, funziona anche per gruppi continui. L'Eq.(16) permette di scrivere esplicitamente la rappresentazione matriciale  $\mathbf{U}_g$ . La funzione  $s(g_x)$  si può pensare come un vettore

$$\begin{pmatrix} s(g_1) \\ s(g_2) \\ s(g_3) \\ \dots \\ s(g_n) \end{pmatrix}$$

dove l'indice individua i punti di  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  in particolare  $g_1 = e$  è il rappresentativo di  $\mathcal{H}$ . Indichiamo con  $\{g_i\}$  il coset cui appartiene  $g_i$  per cui  $\{g_1\} = \mathcal{H}$ ,  $\{g_2\} = g_2 \mathcal{H}$ , etc. . Si ha perciò che l'azione di  $\mathbf{U}_g$  è rappresentata da

- a) la permutazione degli indici  $i \rightarrow j$  corrispondente a  $g \{g_i\} = \{g_j\}$
- b) l'azione della rappresentazione  $\lambda$  sul vettore  $s(g_i)$ .

Si conclude allora che la rappresentazione indotta si può identificare con la seguente matrice

$$(17) \quad (\mathbf{U}_g)_{ij} = \lambda(g_i^{-1} g g_j), \{i, j = 1, \dots, \frac{\#\mathcal{G}}{\#\mathcal{H}}\}$$

( $\#\mathcal{G}$ )=ordine( $\mathcal{G}$ )=numero di elementi di  $\mathcal{G}$ ), con la convenzione che  $\lambda$  vale zero se il suo argomento **non appartiene a**  $\mathcal{H}$ . Si noti che  $\mathbf{U}$  assume una struttura a blocchi di dimensione pari a quella di  $\lambda$  e inoltre per ogni riga o colonna c'è un solo blocco diverso da zero; assumendo il contrario infatti si concluderebbe che  $g_i$  e  $g_j$  sarebbero nello stesso coset con  $i \neq j$ . La dimensione della rappresentazione indotta è perciò data dalla dimensione di  $\lambda$  moltiplicata per il numero di cosets distinti, cioè  $\#\mathcal{G}/\#\mathcal{H}$ .

Si noti che una relazione del tipo

$$U_g \psi(x) = \mathcal{D}(g) \psi(g^{-1} x)$$

è utilizzata in meccanica quantistica per rappresentare l'azione delle rotazioni sugli spinori di Pauli. Quello che incontriamo nel contesto delle rappresentazioni indotte rappresenta una generalizzazione in cui il moltiplicatore  $\mathcal{D}$  dipende anche da  $x$ :

$$U_g \psi(x) = \mathcal{D}(g, x) \psi(g^{-1} x).$$

La condizione da imporre al "moltiplicatore"  $\mathcal{D}$  affinché  $U_g$  costituisca una rappresentazione si trova immediatamente

$$\begin{aligned} (U_{g_1} U_{g_2} \psi)(x) &= \mathcal{D}(g_1, x) (U_{g_2} \psi)(g_1^{-1} x) \\ &= \mathcal{D}(g_1, x) \mathcal{D}(g_2, g_1^{-1} x) \psi(g_2^{-1} g_1^{-1} x) \\ &= \mathcal{D}(g_1 g_2, x) \psi((g_1 g_2)^{-1} x) \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{D}(g_1, x) \mathcal{D}(g_2, g_1^{-1} x) = \mathcal{D}(g_1 g_2, x)$$

Questo schema di realizzazione di rappresentazioni lineari si estende anche ai gruppi continui - ne vedremo l'applicazione al gruppo delle rotazioni.

1.3.1. *Esempio 1.* Sia  $\mathcal{G} = S_3$  (permutazioni su tre elementi) e  $\mathcal{H}$  sia dato da  $\{e, r, r^2\}$ , cioè il sottogruppo delle permutazioni cicliche che corrisponde alle rotazioni di  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$  nella realizzazione come simmetria del triangolo equilatero.  $\mathcal{H}$  è abeliano quindi le sue rappresentazioni irriducibili sono monodimensionali. Consideriamo la rappresentazione

$$\lambda(r) = \omega = e^{2i\pi/3}.$$

Inoltre scegliamo i rappresentativi dei cosets così:  $g_1 = e$ ,  $g_2 = \sigma = (12)$ . La rappresentazione indotta è bidimensionale (6 - 3) e si avrà:

$$\begin{aligned} U(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ U(r) &= \begin{pmatrix} \omega(e r e) & \omega(e r \sigma) \\ \omega(\sigma^{-1} r e) & \omega(\sigma^{-1} r \sigma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \\ U(\sigma) &= \begin{pmatrix} \omega(e \sigma e) & \omega(e \sigma \sigma) \\ \omega(\sigma^{-1} \sigma e) & \omega(\sigma^{-1} \sigma \sigma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

infatti  $\sigma, r \sigma$  e  $\sigma^3$  non appartengono ad  $\mathcal{H}$  e infine  $\sigma r \sigma = r^2 = r^{-1}$ . La rappresentazione indotta coincide con la rappresentazione irriducibile di dimensione due.

1.3.2. *Esempio 2.* Sia  $\mathbb{Q}$  il gruppo dei quaternioni, cioè

$$(18) \quad \mathbb{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

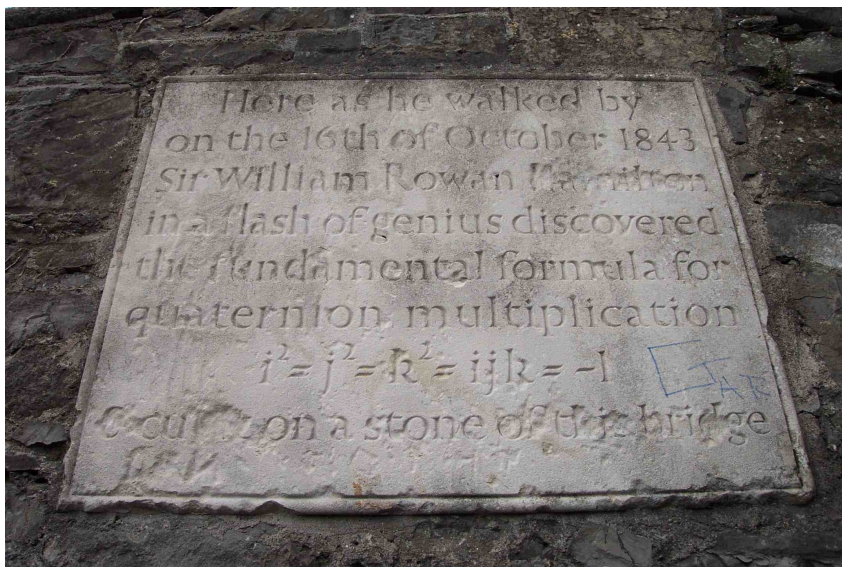


FIGURA 1. Brougham Bridge, Dublin, la lapide ricorda la scoperta dei quaternioni ad opera di Hamilton.

con le regole di composizione  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ ,  $\mathbf{ijk} = -1$ ,  $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ . Sia  $\mathcal{H} = \{1, -1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ , e  $\mathbf{j}\mathcal{H} = \{\mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}^*$ . Scegliamo la rappresentazione di  $\mathcal{H}$  da cui costruire la rappresentazione indotta:  $\lambda(\mathbf{i}) = \mathbf{i} \in \mathbb{C}$ . Allora, secondo la Eq.(17) si ha

$$(19) \quad \mathcal{D}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{i}\mathbf{i}) & \lambda(\mathbf{i}\mathbf{j}) \\ \lambda(\mathbf{j}^{-1}\mathbf{i}) & \lambda(\mathbf{j}^{-1}\mathbf{j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

$$(20) \quad \mathcal{D}(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{j}\mathbf{j}) & \lambda(\mathbf{j}\mathbf{k}) \\ \lambda(\mathbf{k}^{-1}\mathbf{j}) & \lambda(\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(21) \quad \mathcal{D}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{k}\mathbf{k}) & \lambda(\mathbf{k}\mathbf{i}) \\ \lambda(\mathbf{i}^{-1}\mathbf{k}) & \lambda(\mathbf{i}^{-1}\mathbf{i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato perciò la rappresentazione  $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}\sigma_3$ ,  $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{i}\sigma_2$  e  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{i}\sigma_1$  in termini di matrici di Cayley-Pauli (si noti *senza alcun ricorso alla teoria del momento angolare!*). Ci si può sincerare se questa sia una rappresentazione irriducibile utilizzando il criterio  $\sum \chi^2 = \#(\mathbb{Q})$  il che è lasciato come esercizio.

1.3.3. *Esercizio 1.* Si studi la rappresentazione indotta da  $S^3$  a  $S^4$  a partire dalla rappresentazione banale di  $S^3$  o da quella alternante  $\lambda(g) = \pm 1$  (cioè  $\lambda$  è l'indice della permutazione. La rappresentazione indotta ha dimensione  $4 = 4!/3!$ ).

1.3.4. *Esercizio 2.* Sia  $\mathcal{H} = \{e, -e\}$ , sottogruppo del gruppo  $\mathbb{Q}$  dei quaternioni e si consideri la sua rappresentazione  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $e \rightarrow 1, -e \rightarrow -1$ . Si costruisca la rappresentazione indotta  $\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathbb{Q}}$  e la si analizzi in termini di rappresentazioni irriducibili. La tabella dei caratteri di  $\mathbb{Q}$  è la seguente:

\*In questo momento stiamo considerando il gruppo dei quaternioni, quindi il segno "-" in "-1" o in "-j" **non** significa che  $\mathbf{j}-\mathbf{j} = 0$  in quanto l'unica operazione consentita è il prodotto. Sta di fatto che il gruppo dei quaternioni può essere esteso a un campo con due operazioni (+, ×), e quindi il segno meno sta a identificare l'inverso rispetto alla somma, ma non è quanto stiamo considerando a questo punto.

Characters \ classes	classes				
	e	-e	(i, -i)	(j, -j)	(k, -k)
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	2	-2	0	0	0
$\chi_3$	1	1	1	-1	-1
$\chi_4$	1	1	-1	1	-1
$\chi_5$	1	1	-1	-1	1

1.3.5. *La relazione di reciprocità di Frobenius.* Dalla forma della rappresentazione indotta data dall'Eq.(17) se ne può ricavare immediatamente il carattere. Infatti sulla diagonale gli elementi non nulli sono quelli per cui il coset  $g_i$  costituisce un punto fisso della trasformazione  $g$ ; infatti da  $g_i^{-1} g g_i \in \mathcal{H}$  si deduce che  $g g_i = g_i h$  per qualche  $h \in \mathcal{H}$  e dunque il coset di cui  $g_i$  è rappresentante rimane invariato per moltiplicazione a sinistra di  $g$ . Dunque il carattere di  $\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}$  è dato da

$$(22) \quad \chi_{\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}} = \sum_{x | g x = x} \text{Tr}[\lambda(g_x^{-1} g g_x)]$$

dove  $\text{Tr}[M]$  indica la *traccia* della matrice  $M$  (la somma degli elementi di matrice sulla diagonale). Nell'esempio precedente si ha che  $r$  lascia invarianti entrambi i cosets  $\{\mathcal{H}, \sigma\mathcal{H}\}$  e il carattere è dato infatti da  $\omega(r) + \omega(\sigma r \sigma)$ .

Sia  $(\chi_1, \chi_2)_{\mathcal{G}}$  il prodotto invariante per i caratteri di  $\mathcal{G}$ , ossia

$$(23) \quad (\chi_1, \chi_2)_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g)$$

Dimostriamo ora il *teorema di reciprocità di Frobenius*:

$$(24) \quad (\chi, \chi_{\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}})_{\mathcal{G}} = (\chi|_{\mathcal{H}}, \chi(\lambda))_{\mathcal{H}}$$

dove  $\chi$  è il carattere di una qualunque rappresentazione irriducibile di  $\mathcal{G}$ ,  $\chi|_{\mathcal{H}}$  ne è la restrizione a  $\mathcal{H}$  e naturalmente  $\chi(\lambda) = \text{Tr}[\lambda]$  è il carattere della rappresentazione  $\lambda$  di  $\mathcal{H}$ . La relazione dice che la rappresentazione indotta  $\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}$  contiene la rappresentazione irriducibile  $\chi$  di  $\mathcal{G}$  un numero di volte pari a quante  $\lambda$  è contenuta nella rappresentazione  $\chi$  ristretta a  $\mathcal{H}$ . Nell'esempio di  $S_3$  le due rappresentazioni monodimensionali, ristrette ad  $\mathcal{H}$ , coincidono con la rappresentazione banale di  $\mathcal{H}$  e quindi il membro di destra si annulla per l'ortogonalità dei caratteri ( $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ). Si conclude che  $\lambda \uparrow \mathcal{G}$  contiene solo la rappresentazione bidimensionale, (ovviamente una volta sola).

Dimostrazione: Si ha

$$\begin{aligned} (\chi, \chi_{\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}})_{\mathcal{G}} &= \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}(g)) \overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{x | g x = x} \text{Tr}[\lambda(g_x^{-1} g g_x)] \overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{\#(\mathcal{G})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \frac{1}{\#(\mathcal{H})} \sum_{g'^{-1} g g' \in \mathcal{H}} \text{Tr}[\lambda(g'^{-1} g g')] \overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{\#(\mathcal{G})\#(\mathcal{H})} \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \text{Tr}[\lambda(h)] \overline{\chi(g' h g'^{-1})} \end{aligned}$$

Ma ora il prodotto  $g' h g'^{-1}$  è valutato in un carattere di  $\mathcal{G}$  e quindi  $\chi(g' h g'^{-1}) = \chi(h)$ , la dipendenza da  $g'$  sparisce e la somma su  $\mathcal{G}$  cancella il fattore  $\#(\mathcal{G})$ ; il risultato finale è perciò

$$(25) \quad (\chi, \chi(\text{Ind}_{\lambda \uparrow \mathcal{G}}))_{\mathcal{G}} = (\chi|_{\mathcal{H}}, \chi(\lambda))_{\mathcal{H}}$$

1.3.6. *Esempio.* Si consideri il processo di induzione a partire dal sottogruppo banale  $\{e\}$ . La rappresentazione indotta coincide con la rappresentazione regolare

$$(26) \quad (\mathbf{U}_{\text{reg}}(g) f)(g') = f(g^{-1} g')$$

e la decomposizione in rappresentazioni irriducibili si deduce dal teorema di Frobenius:

$$(27) \quad (\chi_{\mu}, \chi(\text{Ind}_{1 \uparrow \mathcal{G}}))_{\mathcal{G}} = \chi_{\mu}(e) = \mathbf{d}_{\mu}$$

il che significa che la rappresentazione regolare contiene ogni rappresentazione irriducibile con molteplicità pari alla dimensione, e infatti  $\sum_{\mu} \mathbf{d}_{\mu}^2 = \#(\mathcal{G})$ .

## 2. APPLICAZIONE ALLE VIBRAZIONI MOLECOLARI

Per questa parte si veda il testo di **L.Landau e L.Lifshitz** [[LL76]] oppure il libro di **H. Georgi** [[Geo99]], quello di **S. Sternberg** [[Ste94]] già citato, oppure per un minimo di informazione l'appendice del testo di **Corben-Stehle** [[CS60]].

Le oscillazioni elastiche di una molecola intorno alla sua configurazione di equilibrio possono essere analizzate in base alla simmetria della molecola. Consideriamo una molecola con  $n$  atomi, con masse  $m_i$  legati tra loro da forze a due corpi  $V(|x_i - x_j|)$ . Se le posizioni di equilibrio sono date da  $x_i^{(0)}$ , l'approssimazione quadratica per il potenziale fornisce un'Hamiltoniana così strutturata:

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, M^{-1} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{x}, V_2 \mathbf{x} \rangle$$

dove  $\mathbf{x}$  è ridefinito come il vettore degli scostamenti dall'equilibrio dei singoli atomi,  $M$  è la matrice delle masse e  $V_2$  è la matrice che definisce lo sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine di  $V$ . Le frequenze dei modi normali di vibrazione sono ottenute allora diagonalizzando la matrice che si ottiene attraverso la trasformazione canonica

$$\mathbf{p}' = M^{-1/2} \mathbf{p}; \quad \mathbf{x}' = M^{1/2} \mathbf{x}.$$

L'Hamiltoniana equivalente è pertanto (sopprimendo l'apice)

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle M^{-1/2} \mathbf{x}, V_2 M^{-1/2} \mathbf{x} \rangle$$

e le frequenze si trovano diagonalizzando la matrice

$$\Omega^2 \equiv 2M^{-1/2} V_2 M^{-1/2}, .$$

Il calcolo di  $V_2$  può risultare laborioso ed è consigliabile utilizzare un programma simbolico. Il caso della molecola di ammoniaca è contenuto nel file `ammonia.nb`. L'output del programma mostra caratteristiche interessanti: intanto ci sono *sei frequenze esattamente pari a zero* e le altre mostano due coppie di frequenze coincidenti. Qualitativamente ciò è deducibile senza fare alcun conto numerico, utilizzando la teoria dei gruppi. I modi zero sono facilmente spiegabili in termini di simmetria di traslazione-rotazione. Infatti, dal momento che l'energia potenziale dipende solo dalla posizione reciproca degli atomi, essa rimane invariante sotto rotazioni rigide della molecola e sotto traslazioni rigide

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_i \rightarrow R \mathbf{x}_i$$

dove la traslazione  $\mathbf{a}$  e la matrice di rotazione  $R$  sono le stesse per tutti gli atomi. Questi movimenti rigidi della molecola non comportano una forza di richiamo, cioè il potenziale è

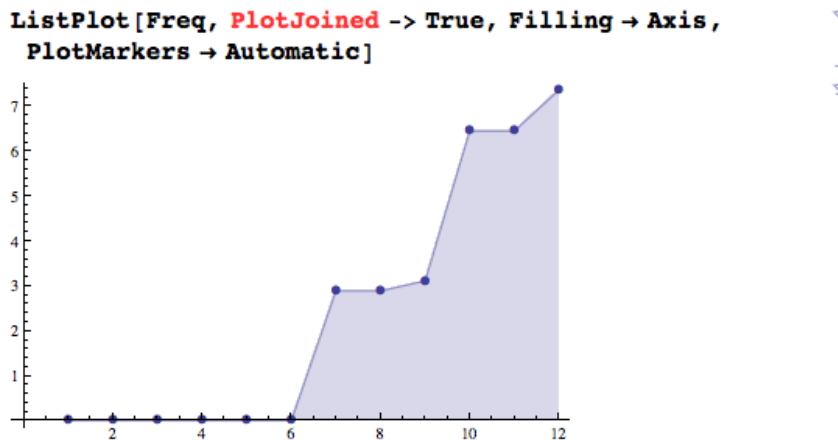


FIGURA 2. Output di ammonia.nb

perfettamente piatto rispetto a questi spostamenti e quindi questi spostamenti rappresentano sei gradi di libertà che evolvono nel tempo in modo lineare (e quindi frequenza zero). La struttura a singoletti e doppietti invece è analizzabile in termini di simmetria. La molecola di ammoniaca nella sua configurazione di equilibrio assume la forma di una piramide con una base a forma di triangolo equilatero. Ciò implica che ci sono trasformazioni spaziali che lasciano invariante l'energia potenziale scambiando tra loro gli atomi di idrogeno. Sono tutte le trasformazioni di simmetria del triangolo equilatero, le due rotazioni di angolo  $\pm 2\pi/3$  e le riflessioni attorno agli assi di simmetria del triangolo. Il gruppo di simmetria è pertanto  $S^3$ . Gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio siano organizzati nel vettore

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_N \\ x_{H1} \\ x_{H2} \\ x_{H3} \end{pmatrix}$$

dove assumiamo che le posizioni di equilibrio siano date da  $x_N^{(0)} = (0, 0, a)$ ,  $x_{H3}^{(0)} = (0, b\sqrt{3}/3, 0)$ ,  $x_{H1}^{(0)} = (-b/2, -b\sqrt{3}/6, 0)$ ,  $x_{H2}^{(0)} = (b/2, -b\sqrt{3}/6, 0)$ , dove  $a$  e  $b$  sono gli spigoli della piramide. Una rotazione di  $2\pi/3$  trasforma il vettore  $\mathbf{X}$  come segue

$$\mathbf{X} \rightarrow \begin{pmatrix} R_{2\pi/3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{2\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{2\pi/3} \\ 0 & R_{2\pi/3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

con

$$R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre una riflessione intorno al piano che contiene N e H<sub>3</sub> lascia le coordinate y e z invariate e cambia segno alla x, e dunque è rappresentata da

$$\mathbf{X} \rightarrow \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

dove

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le altre trasformazioni di simmetria sono rappresentate in modo simile, ma per analizzare le rappresentazioni in termini di IRREP's ci basta conoscere il carattere per le tre classi e quindi abbiamo già quanto serve: il carattere è dato da  $\chi = (12, 0, 2)$ , il primo è la dimensione della rappresentazione, il secondo si legge direttamente dal fatto che  $\text{Tr}[\mathbf{R}_{2\pi/3}] = 0$  e infine  $\text{Tr}[\mathbf{S}] = 1$  e ci sono due blocchi S sulla diagonale (due atomi rimangono al loro posto ovvero ci sono due punti fissi nella trasformazione).

Si dimostra (vedi Landau-Lifshitz, vol.III) che valgono del tutto in generale le relazioni semplicissime

$$(28) \quad \begin{aligned} \chi_{\text{rot}} &= n_{\text{fixed}} (1 + 2 \cos(\alpha)) \\ \chi_{\text{reflex}} &= n_{\text{fixed}} (-1 + 2 \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

dove  $n_{\text{fixed}}$  è il numero di atomi che non si spostano dal loro punto di equilibrio,  $\chi_{\text{rot}}$  è il carattere relativo a rotazioni di un angolo  $\alpha$  intorno a qualunque asse di simmetria, mentre  $\chi_{\text{reflex}}$  riguarda le riflessioni intorno a un piano con rotazione di un angolo  $\alpha$  nello stesso piano. L'analisi che si può trovare sempre in LL, trova che i modi zero contribuiscono al carattere secondo

$$(29) \quad \begin{aligned} \chi_{\text{rot}}^{(0)} &= 2 (1 + 2 \cos(\alpha)) \\ \chi_{\text{reflex}}^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

e perciò il carattere della rappresentazione ristretta ai modi vibrazionali è dato dalla formula

$$(30) \quad \begin{aligned} \chi_{\text{rot}} &= (n_{\text{fixed}} - 2) (1 + 2 \cos(\alpha)) \\ \chi_{\text{reflex}} &= n_{\text{fixed}} (-1 + 2 \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

Ad esempio il carattere della rappresentazione per l'ammoniaca, una volta sottratto (6, 0, 0) dei modi zero è data da (6, 0, 2) e la decomposizione in IRREP's si trova utilizzando l'Eq.(11) tenendo conto del numero di elementi in ciascuna classe (rispettivamente 1, 2, 3):

$$\alpha_1 = \frac{1}{6} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

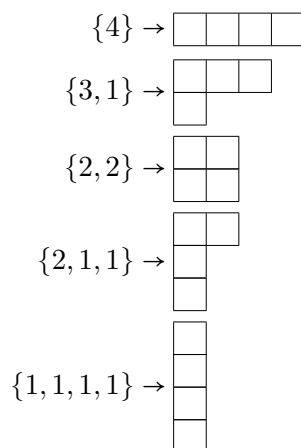
$$\alpha_2 = \frac{1}{6} (2, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{6} (1, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

La rappresentazione sui modi normali vibrazionali si decompone perciò in due modi invarianti rispetto al gruppo di simmetria e due doppietti di modi degeneri. Questo riproduce quanto calcolato numericamente.

Sul testo di LL si trovano analizzate altre molecole semplici. Sono disponibili codici matematica per metano ed esano (`methane.nb`, e `hexane.nb`).

2.0.7. *La molecola di Metano.* Quattro atomi di idrogeno ai vertici di un tetraedro e l'atomo di carbonio al centro conferiscono alla molecola di metano la simmetria  $T_d$  equivalente al gruppo delle permutazioni su quattro elementi. La dimensione del gruppo è  $\#(S_4) = 4! = 24$  e il numero delle classi è dato dalle possibili strutture cicli:  $4 = \{1, 1, 1, 1\} = \{2, 1, 1\} = \{3, 1\} = \{2, 2\} = \{4\}$  o in termini di diagrammi di Young



Le rappresentazioni irriducibili devono soddisfare la regola di somma  $\sum_{\mu=1}^5 d_{\mu}^2 = 24$ , ovvero, tenendo conto che esistono per ogni gruppo di permutazioni sia la rappresentazione banale sia quella che assegna ad ogni elemento la sua parità, si avrà allora per le rimanenti tre rappresentazioni  $\sum_{\mu=2}^4 d_{\mu}^2 = 22$ . La dimensione massima potrebbe essere 4 ma non si può avere 6 come somma di due quadrati! Allora la dimensione maggiore è 3 e 13 è la somma di 9 + 4, dunque l'unica possibilità è  $d_{\mu} = (1, 3, 2, 3, 1)$ . Questo si può dedurre dalla formula degli *hooknumbers*



$(4!/h):^\dagger$

(31)

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 4! \rightarrow d_4 = 1 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} = 8 \rightarrow d_{3,1} = 3 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} = 12 \rightarrow d_{2,2} = 2 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = 8 \rightarrow d_{2,1,1} = 3 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = 4! \rightarrow d_{\{1,1,1,1\}} = 1
 \end{array}$$

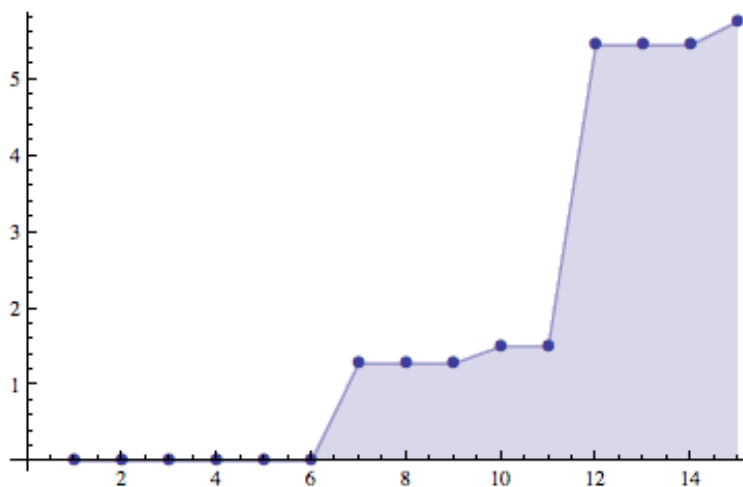


FIGURA 3. Output di methane.nb

Il calcolo delle molteplicità dei modi normali richiede la tabella dei caratteri di  $S_4$

<sup>†</sup>Per ogni casella del diagramma di Young si contano quante caselle ci sono a destra ( $n_{right}$ ) e sotto ( $n_{down}$ ), e si inserisce nella casella  $n_{right} + n_{down} + 1$ ; lo hook number è il prodotto di tutti i numeri così determinati.

$\chi$ \ Class	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
$A_1$	1	1	1	1	1
$A_2$	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
$F_2$	3	0	-1	1	-1
$F_1$	3	0	-1	-1	1

La tabella dei caratteri di  $S_4$ .

dove i nomi delle IRREP's sono quelli convenzionali (vedi LL) e le classi sono costituite da **otto** rotazioni attorno ad assi ternari ( $C_3$ ), le otto diagonali del cubo, **tre** assi binari ( $C_2$ ), gli assi x,y,z, **sei** riflessioni rispetto ai piani con vettore normale  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, -1)$  e infine **6** rotoriflessioni di  $\pi/4$  e  $3\pi/4$  rispetto ai piani  $(x, y)$ ,  $(y, z)$ ,  $(z, x)$ . Con le formule Eq.(30) si può allora calcolare il carattere della rappresentazione e analizzarla in termini di IRREP's. Questo è lasciato come un divertente esercizio.

### 3. Gruppi di Lie

**3.1. Gruppi di trasformazioni.** Consideriamo le trasformazioni dello spazio che lasciano invariante la distanza tra coppie di punti: queste formano un gruppo,  $E_3$ , detto *gruppo euclideo*

$$x'^i = R_j^i x^j + a^i$$

dove la matrice  $R$  è ortogonale. Gli assiomi di gruppo sono ovviamente soddisfatti. Si dice che  $E_3$  è un *gruppo di Lie*. Con questo si intende un gruppo i cui elementi dipendono da un numero finito di parametri reali con la proprietà che la legge di composizione sia una funzione analitica dei parametri. Nel caso del gruppo euclideo i parametri sono sei (tre per le traslazioni e tre per le rotazioni). Nel caso del gruppo di Poincaré i parametri sono *dieci* così definiti:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$$

dove  $a^\mu$  parametrizzano traslazioni spazio-temporali e  $\Lambda$  è una matrice di Lorentz, tale cioè da lasciare invariante l'intervallo tra due eventi qualunque nello spazio-tempo di Minkowsky. Il conteggio di parametri si fa così

$$(\Lambda x, G \Lambda y) = (x, G y), \quad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comporta che

$$\Lambda^t G \Lambda = G.$$

I sedici parametri di una matrice  $4 \times 4$  sono perciò vincolati da dieci relazioni (l'equazione precedente è simmetrica sotto trasposizione); dunque sei parametri entrano nella matrice della trasformazione di Lorentz e quattro sono i parametri di traslazione. La composizione tra due trasformazioni è data da

$$\begin{aligned} y^\mu &= \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \\ z^\mu &= \Lambda'_\nu{}^\mu y^\nu + a'^\mu \\ z^\mu &= (\Lambda \Lambda')_\nu{}^\mu x^\nu + (\Lambda' a + a')^\mu \end{aligned}$$

e si tratta come si vede di funzioni algebriche (dunque analitiche).

**3.2. Struttura di gruppo di Lie.** Da un punto di vista astratto, un gruppo di Lie <sup>‡</sup> è una varietà differenziabile<sup>§</sup>  $\mathcal{M}$  su cui è definita una applicazione  $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  che soddisfi gli

<sup>‡</sup>Sophus Lie, matematico norvegese, ha creato la teoria dei gruppi continui come strumento per lo studio sistematico delle simmetrie in geometria e nella teoria delle equazioni a derivate parziali.

<sup>§</sup>Una varietà differenziabile (differentiable manifold) è un insieme dotato di una topologia che localmente si può mettere in corrispondenza con degli aperti in  $\mathbb{R}^n$  - la superficie della sfera è l'esempio più familiare, le mappe geografiche essendo appunto una corrispondenza di un aperto sulla sfera con un aperto nel piano  $\mathbb{R}^2$ .

assiomi di gruppo; indicando con  $x, y, z, \dots$  punti di  $\mathcal{M}$ , e con  $e$  l'identità del gruppo

$$\begin{aligned}\phi(e, x) &= \phi(x, e) = e && \text{(esistenza dell'identità)} \\ \phi(x, \phi(y, z)) &= \phi(\phi(x, y), z) && \text{(associatività)} \\ \phi(x, x^{-1}) &= e && \text{(esistenza dell'inverso)}\end{aligned}$$

La funzione  $\phi(x, y)$  è l'analogo della tabella di moltiplicazione dei gruppi finiti. Nell'intorno di ogni elemento si possono introdurre delle coordinate che individuano univocamente l'elemento. La dimensione della varietà è detta la dimensione del gruppo. Ad es. il gruppo delle rotazioni nel piano  $SO(2)$  è caratterizzato da

$$\phi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

dove  $\alpha, \beta$ , etc rappresentano l'angolo di rotazione. Il gruppo in questo caso è Abelian e la varietà di gruppo è la circonferenza di raggio unitario. Le rotazioni spaziali  $SO(3)$  si possono invece parametrizzare attraverso l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione: il primo individua un punto sulla superficie di una sfera  $\mathbf{n}$  e il secondo è un parametro compreso tra zero e  $\pi$ . Si ha l'identificazione tra le due rotazioni  $R(\mathbf{n}, \alpha = \pi)$  e  $R(-\mathbf{n}, \alpha = \pi)$ , di conseguenza il gruppo delle rotazioni è caratterizzato dalla varietà costituita dall'interno di una palla tridimensionale di raggio  $\pi$  in cui però si devono identificare i punti diametralmente opposti. La scelta dei parametri con cui identificare gli elementi di un gruppo di Lie è largamente arbitraria, così come la scelta di coordinate in una varietà. Per studiare la struttura di un gruppo ci si rivolge allora a caratteristiche intrinseche indipendenti da questa scelta.

Del tutto in generale, seguendo il lavoro di Lie, si può considerare un sistema di trasformazioni

$$(32) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$$

che costituiscano un gruppo di trasformazioni sulle coordinate  $x_i$  dipendenti da parametri  $\mathbf{a}_\ell$ . A quali condizioni devono sottostare le funzioni  $f_i$  affinché l'equazione precedente rispetti la struttura di gruppo? Immaginiamo di far seguire alla trasformazione un'altra con parametri infinitesimali  $\delta \mathbf{a}_k$ :

$$\begin{aligned}x'_i + \delta x_i &= f_i(x'_1, \dots, x'_n; \delta \mathbf{a}_1, \dots, \delta \mathbf{a}_r) \\ \delta x_i &= \sum_k \left. \frac{\partial f_i(x'; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}_k} \right|_{\mathbf{a}=0} \delta \mathbf{a}_k \\ &\equiv \sum_k u_{ik}(x') \delta \mathbf{a}_k\end{aligned}$$

La trasformazione complessiva corrisponde a una unica trasformazione con parametri  $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$ , dove:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\ell + d\mathbf{a}_\ell &= \phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r; \delta \mathbf{a}_1, \dots, \delta \mathbf{a}_r) \\ d\mathbf{a}_\ell &= \sum_m \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{a}; \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}_m} \right|_{\mathbf{b}=0} \delta \mathbf{a}_m \equiv \Theta_{\ell m} \delta \mathbf{a}_m\end{aligned}$$

Quest'ultime relazioni si possono invertire per ottenere  $\delta \mathbf{a}_i$  in funzione di  $d\mathbf{a}_i$ , diciamo  $\delta \mathbf{a}_k = \sum_\ell \psi_{k\ell}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}_\ell$ , e sostituendo nell'Eq.(33),

$$dx'_i = \sum_{k,\ell} u_{ik}(x) \psi_{k\ell}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}_\ell$$

ossia le funzioni  $f_i$  sono soluzioni di un sistema di equazioni alle derivate parziali

$$(33) \quad \frac{\partial f_i(x; \mathbf{a})}{\partial a_\ell} = \sum_{\mathbf{k}} u_{i\mathbf{k}}(x) \psi_{\mathbf{k}\ell}(\mathbf{a})$$

Tuttavia sappiamo che affinché un sistema di questo tipo ammetta soluzioni devono essere soddisfatte le condizioni di integrabilità

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_\lambda} (\sum u_{i\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}\mu}) &= \frac{\partial}{\partial a_\mu} (\sum u_{i\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}\lambda}) \\ \sum_{\mathbf{k}} u_{i\mathbf{k}}(x) \left( \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\mu}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\lambda}}{\partial a_\mu} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \left( \psi_{\mathbf{k}\mu} \frac{\partial u_{i\mathbf{k}}}{\partial a_\lambda} - \psi_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\partial u_{i\mathbf{k}}}{\partial a_\mu} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Si trova allora, tenendo conto che le  $u(x)$  vanno differenziate rispetto ai parametri  $a_\mu$  secondo l'Eq.(33), (e per semplicità utilizzando la convenzione della somma su indici ripetuti)

$$(34) \quad u_{i\mathbf{k}} \left( \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\mu}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\lambda}}{\partial a_\mu} \right) + \psi_{\mathbf{k}\mu} \frac{\partial u_{i\mathbf{k}}}{\partial x_j} u_{j\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{m}\lambda} - \psi_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\partial u_{i\mathbf{k}}}{\partial x_j} u_{j\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{m}\mu} = 0$$

e utilizzando la matrice inversa di  $\psi$ ...

$$(35) \quad u_{j\sigma}(x) \frac{\partial u_{i\tau}(x)}{\partial x_j} - u_{j\tau}(x) \frac{\partial u_{i\sigma}(x)}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\mu}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\lambda}}{\partial a_\mu} \right) \Theta_{\mu\tau} \Theta_{\lambda\sigma} u_{i\mathbf{k}}$$

Si definiscono gli operatori differenziali

$$(36) \quad \boxed{X_\rho = u_{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

che permettono di rappresentare l'effetto di una trasformazione infinitesimale su una generica funzione differenziabile delle  $x$ :

$$\delta F(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} u_{i\rho}(x) \delta a_\rho = X_\rho(F) \delta a_\rho$$

Gli operatori  $X_\rho$  sono denominati “generatori infinitesimali del gruppo”. L'equazione (35), moltiplicando a destra per  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  si può tradurre nella seguente

$$X_\sigma X_\rho - X_\rho X_\sigma = c_{\sigma\rho}^\tau X_\tau$$

dove

$$c_{\tau\sigma}^\kappa = \left( \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\mu}}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\lambda}}{\partial a_\mu} \right) \Theta_{\mu\tau} \Theta_{\lambda\sigma}$$

Uno dei teoremi dimostrati da Lie afferma che le  $c_{\tau\sigma}^\kappa$  non dipendono dai parametri e sono dette “costanti di struttura” del gruppo (vedi [Hel78]). Un modo semplice di vederlo è attraverso il seguente ragionamento: un gruppo di Lie *agisce su se stesso* come gruppo di trasformazioni; la legge di composizione si può interpretare sullo stesso piano dell'Eq.(32). In questo caso particolare le funzioni  $u_{i\mathbf{k}}$  si identificano con le  $\Theta_{i\mathbf{k}}$  e la relazione (35) diventa

$$\Theta_{j\sigma}(b) \frac{\partial \Theta_{i\tau}(b)}{\partial b_j} - \Theta_{j\tau}(b) \frac{\partial \Theta_{i\sigma}(b)}{\partial b_j} = \left( \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\mu}(a)}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}\lambda}(a)}{\partial a_\mu} \right) \Theta_{\mu\tau}(a) \Theta_{\lambda\sigma}(a) \Theta_{i\mathbf{k}}(b)$$

Portando la matrice  $\Theta(b)$  dal membro di destra a quello di sinistra si ottiene che a primo membro si ha un'espressione dipendente solo da  $b$  e al secondo un'espressione dipendente solo da  $a$  e quindi entrambi i membri devono essere costanti. L'inversione non si può effettuare nel

caso generale in quanto lo spazio su cui agisce il gruppo può avere una dimensione differente da quella del gruppo e la matrice  $u_{ik}$  è in generale rettangolare.

**Esempio:** consideriamo il semplice gruppo delle trasformazioni affini in una variabile

$$\mathbf{x}' = e^\tau \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

L'identità corrisponde a  $\mathbf{b} = \tau = 0$ . La legge di composizione  $\phi$  si trova immediatamente

$$\phi((\tau', \mathbf{b}'), (\tau, \mathbf{b})) = (\tau + \tau', e^{\tau'} \mathbf{b} + \mathbf{b}')$$

Secondo lo schema generale, calcoliamo le derivate parziali  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{a}_\mu$ :

$$\mathbf{x}' + d\mathbf{x}' = e^{\delta\tau} \mathbf{x}' + \delta\mathbf{b} \implies d\mathbf{x}' = \mathbf{x}' \delta\tau + \delta\mathbf{b}$$

da cui si legge che  $u_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ,  $u_2(\mathbf{x}) = 1$  e quindi i generatori sono

$$X_1 = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, X_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$

e il loro commutatore si trova subito:  $[X_1, X_2] = [\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}] = -X_2$ . ◀

**Esempio:** rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Le rotazioni si possono parametrizzare con un versore  $\mathbf{n}$  che individua l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione  $\theta$ . La trasformazione è data esplicitamente da

$$(37) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} \sin \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$$

Per rotazioni infinitesimali possiamo identificare  $n_i \delta\theta = \delta a_i$  come incrementi dei parametri e la trasformazione si riduce a

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} \implies \delta x_i = \epsilon_{ij}^k \delta a_j x_k$$

ovvero  $u_{ij}(\mathbf{x}) = \epsilon_{ij}^k x_k$  che porta ai generatori  $X_i = \epsilon_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Da qui si ricavano le costanti di struttura

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= [x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}] \\ &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = X_3 \end{aligned}$$

e analoghe per le altre scelte di indici ( $[X_i, X_j] = \epsilon_{ij}^k X_k$ ). in cui si riconosceranno le regole di commutazione del momento angolare per una particella scalare in meccanica quantistica  $\mathbf{J} = -i \mathbf{x} \wedge \nabla$ . ◀

**Esempio:** ancora per le rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ , si può vedere che le costanti di struttura determinano lo sviluppo di Taylor della funzione  $\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Infatti dalla relazione Eq.(37) si deduce per la trasformazione nell'intorno dell'identità

$$(38) \quad \mathbf{x}' \approx \mathbf{x} + \theta \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} - \frac{1}{2} \theta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) + O(\theta^3).$$

La composizione con una seconda rotazione di parametri  $(\theta', \mathbf{n}')$  è perciò espressa da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &\approx \mathbf{x} - \theta \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} - \frac{1}{2} \theta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) - \theta' \mathbf{n}' \wedge (\mathbf{x} - \theta \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \theta'^2 (\mathbf{x} - \mathbf{n}'(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} - (\theta \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} + \theta' \mathbf{n}' \wedge \mathbf{x}) + \theta \theta' \mathbf{n}' \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\theta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) + \theta'^2 (\mathbf{x} - \mathbf{n}'(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}))) \end{aligned}$$

Come si vede l'espressione che ne risulta simmetrica nello scambio  $(\theta, \mathbf{n}) \leftrightarrow (\theta', \mathbf{n}')$  ad eccezione del termine in  $\theta\theta'$ . La differenza tra  $R_{\mathbf{n},\theta} \mathbf{x}$  e  $R_{\mathbf{n}',\theta'} \mathbf{x}$  che segna la non-commutatività della rotazioni è data esplicitamente da

$$(R_{\mathbf{n},\theta} R_{\mathbf{n}',\theta'} \mathbf{x} - \mathbf{x}) - (R_{\mathbf{n}',\theta'} R_{\mathbf{n},\theta} \mathbf{x} - \mathbf{x}) \approx \theta\theta' [\mathbf{n}(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{n}'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})] = \theta\theta' (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \wedge \mathbf{x}$$

e cioè il risultato netto è quello di una rotazione infinitesimale intorno all'asse individuato da  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'$ .

◊. *In queste lezioni non approfondiremo lo studio astratto dei gruppi di Lie. Senza perdere in generalità, ci occuperemo di gruppi di Lie realizzati come sottogruppi chiusi del gruppo generale  $M(\mathbf{n}, \mathbb{C})$ , cioè del gruppo delle matrici complesse  $\mathbf{n}$ -dimensionali. Ad es. il gruppo delle rotazioni spaziali è convenientemente studiato come gruppo delle matrici ortogonali a determinante +1 (il simbolo  $SO(3)$  indica appunto "speciali-ortogonali- $3 \times 3$ ").*

In generale si studiano gruppi di matrici (ortogonali, unitarie, simpletliche) caratterizzate dalla proprietà di lasciare invariante una specifica forma quadratica

$$(M\mathbf{x}, G M\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, G\mathbf{y})$$

Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $G = \mathbf{1}_n$  siamo in presenza del gruppo  $O(n)$  delle rotazioni nello spazio reale  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  e il prodotto interno è Hermitiano, siamo allora in presenza del gruppo  $U(n)$  delle matrici unitarie  $n \times n$ . Se  $G$  è dato dalla matrice a blocchi

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

allora la forma quadratica è antisimmetrica e il gruppo è  $Sp(n, \mathbb{R})$ , detto il gruppo simpletico (noto anche come gruppo delle trasformazioni canoniche lineari in meccanica classica). Se  $G$  è la matrice che definisce la metrica di Lorentz, il gruppo è quello di Lorentz (come accennato all'inizio del capitolo).

Il problema centrale della teoria dei gruppi di Lie in vista delle applicazioni fisiche è naturalmente quello di classificare e determinare le rappresentazioni irriducibili. La Matematica del XX secolo ha essenzialmente risolto completamente il problema grazie al lavoro di Elie Cartan, Wilhelm Killing, Eugene Dynkin, e altri (consultare Wikipedia!).

◊. *La dimensione dei gruppi "classici", ortogonali, unitari, simpletici, è data da*

- a) *Ortagonale:*  $SO(n)$ ,  $dim = \frac{1}{2}n(n-1)$ .
- b) *Unitari:*  $SU(n)$ ,  $dim = n^2 - 1$ ;
- c) *Simpletici:*  $Sp(n, \mathbb{R})$ ,  $dim = n(2n+1)$  ( $n$  pari).

**3.3. L'intorno dell'identità: l'algebra di Lie.** Il fatto cruciale che permette di studiare agevolmente i gruppi di Lie è il seguente: la struttura del gruppo nell'intorno dell'identità determina (quasi) interamente la struttura del gruppo: se due gruppi possono essere messi in corrispondenza biunivoca in un intorno dell'identità essi sono essenzialmente isomorfi a meno di possibili differenze nella struttura globale. Ad es. il gruppo  $SO(3)$  delle rotazioni spaziali e il gruppo  $SU(2)$  delle matrici unitarie bidimensionali sono indistinguibili se studiati vicino all'identità. Tuttavia la relazione precisa è codificata in questi termini: ad ogni vettore spaziale  $\mathbf{x}$  si associa una matrice

$$X = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ossia

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

Allora la trasformazione  $X \rightarrow \mathbf{u} X \mathbf{u}^\dagger$  con  $\mathbf{u} \in SU(2)$  equivale a una rotazione: infatti  $\det X \rightarrow \det(\mathbf{u} X \mathbf{u}^\dagger) = \det X$  e quindi la lunghezza di  $\mathbf{x}$  è invariante, inoltre la matrice Hermitiana  $X$  a

traccia nulla è trasformata in un'altra matrice Hermitiana a traccia nulla. Esplicitamente, per via delle proprietà delle matrici di Pauli

$$\mathbf{x}^{i'} = \frac{1}{2} \mathfrak{Tr}[\sigma^i \mathbf{u} \sigma^j \mathbf{u}^\dagger] \mathbf{x}^j$$

e quindi la rotazione è esprimibile come

$$(39) \quad \mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{2} \mathfrak{Tr}[\sigma^i \mathbf{u} \sigma^j \mathbf{u}^\dagger]$$

Si nota tuttavia che sia la matrice  $\mathbf{u}$  che  $-\mathbf{u}$  corrispondono alla stessa rotazione e quindi i gruppi  $SO(3)$  e  $SU(2)$  sono omomorfi, la corrispondenza essendo  $1 : 2$  con nucleo dell'omomorfismo dato dal sottogruppo discreto  $\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2$ . Questo fatto è alla base della distinzione tra particelle bosoniche e fermioniche. Se ci limitiamo a un intorno dell'identità i due gruppi sono localmente isomorfi.

Esecizio: utilizzare le formule

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{u}(\mathbf{n}, \theta) &= \cos \frac{1}{2} \theta \mathbf{1} + i \sin \frac{1}{2} \theta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

per ricavare l'espressione generale per le rotazioni

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \theta) \mathbf{x} = \cos \theta \mathbf{x} + \sin \theta \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$$

Ora: *come si caratterizza un intorno dell'identità?* Per i gruppi di matrici possiamo sempre utilizzare il **mapping esponenziale**

$$\mathbf{u} = \exp \mathbf{x}$$

e scoprire che per gruppi unitari

$$\mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger = \mathbf{1} = \exp \mathbf{x} \exp \mathbf{x}^\dagger \implies \mathbf{x} + \mathbf{x}^\dagger = 0$$

mentre per i gruppi ortogonali

$$\mathbf{O} \mathbf{O}^t = \mathbf{1} = \exp \mathbf{x} \exp \mathbf{x}^t \implies \mathbf{x} + \mathbf{x}^t = 0$$

dove  $\mathbf{x}^t$  indica la matrice trasposta. Il lettore attento potrebbe obiettare che i passaggi precedenti sono validi solo se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^\dagger$  commutano, cioè  $\mathbf{x}$  sia una matrice *normale*. Questo però è conseguenza immediata del fatto che  $\mathbf{u}^\dagger = \mathbf{u}^{-1}$  e pertanto  $[\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{u}] = 0$  e ciò si estende a qualunque funzione matriciale di  $\mathbf{u}$ .

Dunque nei due casi possiamo identificare l'algebra di Lie con lo spazio delle matrici *antiHermitiane* (rispettivamente *antisimmetriche*). Se poi imponiamo che il determinante sia uguale a uno troviamo

$$\det \exp \mathbf{x} = \exp \mathfrak{Tr}[\mathbf{x}] = 1 \implies \mathfrak{Tr}[\mathbf{x}] = 0.$$

Il map esponenziale diventa particolarmente semplice se ci limitiamo a considerare elementi "vicini all'identità", il che in pratica si traduce nel trascurare termini superiori al secondo nello sviluppo in serie dell'esponenziale. La composizione di due elementi del gruppo si traduce nella composizione degli esponenti:

$$\exp \mathbf{x} \exp \mathbf{y} = \exp \left\{ \mathbf{x} + \mathbf{y} + \frac{1}{2} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \dots \right\}$$

da cui si intuisce che le proprietà del gruppo sono strettamente legate alle proprietà degli esponenti sotto commutazione.

Terminologia: l'insieme dei possibili esponenti costituisce uno spazio lineare che viene denominato "algebra di Lie" del gruppo che indicheremo con  $\mathcal{L}_G$  o semplicemente  $\mathcal{L}$ . La legge di composizione del gruppo si traduce sull'operazione di commutazione nell'algebra di Lie. Una volta scelta una parametrizzazione per il gruppo questa porta anche a una parametrizzazione



per l'algebra di Lie (una base, essendo uno spazio lineare). Ad es. nel caso di  $SU(2)$  si può definire una base con le matrici di Pauli

$$\mathbf{u} = \exp \mathbf{x} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum_i x_i \boldsymbol{\sigma}_i \right\}$$

(notare l'unità immaginaria:  $\mathbf{x}$  è anti-Hermitiano).

⊠. Rappresentazioni di  $SO(3)$ : il gruppo delle rotazioni agisce in  $\mathbb{R}^3$  lasciando invariante le superfici sferiche  $\|\mathbf{x}\| = \text{const}$ . Sulla sfera di raggio fissato l'azione è transitiva cioè ogni punto può essere raggiunto da qualunque altro attraverso una rotazione. Si può convenientemente descrivere le rotazioni sulla sfera facendo riferimento alle coordinate stereografiche: si proiettano i punti della sfera dal "polo nord" sul piano tangente nel polo sud e si parametrizza il punto sul piano con la variabile complessa  $z$  che è legata alla longitudine  $\theta$  e alla latitudine  $\varphi$  dalla relazione

$$z = 2R \cot \frac{1}{2}\theta e^{i\varphi}.$$

Una rotazione si realizza su  $z$  attraverso una trasformazione razionale

$$z \rightarrow z' = \frac{\alpha z + \beta}{-\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$$

Le trasformazioni infinitesimali sono della forma:

$$(40) \quad \alpha = 1 + i\epsilon, \beta = 0: \quad \delta z = 2i\epsilon z$$

$$(41) \quad \alpha = 1, \beta = i\epsilon: \quad \delta z = -i\epsilon(z^2 - 1)$$

$$(42) \quad \alpha = 1, \beta = \epsilon: \quad \delta z = \epsilon(z^2 + 1)$$

Consideriamo le funzioni definite sulla superficie sferica come funzioni di variabile complessa  $f(z)$  e restringiamo l'attenzione alle funzioni analitiche intere (unica singolarità all'infinito). Come si trasforma  $f(z)$  sotto rotazioni? La semplice formula

$$f(z) \rightarrow f\left(\frac{\bar{\alpha}z - \beta}{\beta z + \alpha}\right)$$

non lascia invariante lo spazio di funzioni, in quanto il punto all'infinito viene trasportato in  $z = \bar{\alpha}/\beta$ . Si considera allora una trasformazione analoga a quella che si ottiene con il metodo delle rappresentazioni indotte:

$$f(z) \rightarrow \mu(z; (\alpha, \beta)) f\left(\frac{\bar{\alpha}z - \beta}{\beta z + \alpha}\right)$$

Se scegliamo il moltiplicatore uguale a  $(\bar{\beta}z + \alpha)^n$  con  $n$  intero allora almeno i polinomi di grado  $n$  si trasformano correttamente ossia data la trasformazione

$$(\mathbf{U}f)(z) = (\bar{\beta}z + \alpha)^n f\left(\frac{\bar{\alpha}z - \beta}{\beta z + \alpha}\right)$$

il sottospazio dei polinomi di grado  $n$  è invariante. Si tratta però di verificare che l'equazione precedente definisce una rappresentazione del gruppo. La prova è facile ma laboriosa. Meglio sfruttare l'idea di controllare i generatori infinitesimali e che questi soddisfino le regole di

commutazione corrette; partendo dall'Eq.(40) si trova

$$\begin{aligned}\alpha = 1 + i\epsilon, \beta = 0, \delta z = -2i\epsilon z &\rightarrow \frac{\delta f(z)}{i\epsilon} = \left(n - 2z \frac{d}{dz}\right) f(z) \\ \alpha = 1, \beta = i\epsilon, \delta z = -i\epsilon(z^2 - 1) &\rightarrow \frac{\delta f(z)}{i\epsilon} = \left(nz + (z^2 - 1) \frac{d}{dz}\right) f(z) \\ \alpha = 1, \beta = \epsilon, \delta z = -\epsilon(z^2 + 1) &\rightarrow \frac{\delta f(z)}{i\epsilon} = -i \left(nz + (z^2 + 1) \frac{d}{dz}\right) f(z)\end{aligned}$$

I tre operatori differenziali

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{1}{2}nz + \frac{1}{2}(z^2 + 1) \frac{d}{dz} \\ X_2 &= \frac{1}{2}inz + \frac{1}{2}i(z^2 - 1) \frac{d}{dz} \\ X_3 &= \frac{1}{2}in - iz \frac{d}{dz}\end{aligned}$$

soddisfano le regole di commutazione  $[X_m, X_n] = \epsilon_{mnp} X_p$  di  $\mathfrak{su}(2)$ . Lo spettro di  $-iX_3$  (la terza componente del momento angolare in MQ) si trova immediatamente dall'equazione agli autovalori

$$\frac{1}{2}n f - z \frac{df}{dz} = m f \rightarrow f(z) = K z^{-m + \frac{1}{2}n}$$

dunque  $\frac{1}{2}n - m$  deve essere un intero non-negativo e non superiore a  $n$ , ossia  $m = -\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + 1, \dots, \frac{1}{2}n - 1, \frac{1}{2}n$  che è quanto ci aspettiamo dalla teoria del momento angolare ( $n/2 = j$ ).

Questa costruzione delle rappresentazioni unitarie irriducibili di  $SU(2)$  si può dimostrare che discende dalla applicazione della tecnica delle rappresentazioni indotte, opportunamente estesa ai gruppi di Lie. L'unitarietà si controlla dimostrando che

$$\langle U f, U f \rangle = \langle f, f \rangle$$

con

$$\langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2)^{-2-n} |f(z)|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

Esercizio: dimostrare che

a) le coordinate cartesiane sulla sfera in funzione della coordinata complessa  $z$  sono date da

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2 \operatorname{Re}\{z\}}{1 + |z|^2} \\ \eta &= \frac{2 \operatorname{Im}\{z\}}{1 + |z|^2} \\ \zeta &= \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\end{aligned}$$

b) sotto la trasformazione  $z \rightarrow (\alpha z + \beta)/(-\bar{\beta}z + \bar{\alpha})$  le coordinate  $(\xi, \eta, \zeta)$  si trasformano linearmente (e quindi sono una rotazione espressa in termini dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ ). Dedurne l'espressione esplicita di una rotazione spaziale in termini dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , noti come parametri di Cayley-Klein.

3.3.1. *Lo sviluppo di BCH.* La legge di composizione di un gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  si può risalire interamente alle proprietà della sua algebra di Lie  $\mathcal{L}$ , in questo senso. Se sappiamo come calcolare il commutatore di due elementi dell'algebra, allora sappiamo anche comporre gli elementi del gruppo. Per questo si invoca la formula di Baker-Campbell-Hausdorff<sup>¶</sup>

$$(43) \quad \boxed{e^x e^y = \exp \{ \mathcal{H}(x, y) \}}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] - \frac{1}{24}[x, [y, [x, y]]] + \dots}$$

il che mostra che la composizione di due elementi del gruppo è interamente determinata dalla relazione di commutazione, almeno nell'intorno dell'identità in cui converge la serie. I primi termini della BCH si possono ottenere in forma compatta dalla catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \exp\{x + y\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{x/n} e^{y/n} \right)^n \\ &= e^{x/n} e^{y/n} e^{-x/n} e^{2x/n} e^{y/n} e^{-2x/n} e^{3x/n} e^{y/n} e^{-3x/n} \dots e^x e^{y/n} e^{-x} e^x \\ &= \exp\{y/n + [x, y]/n^2\} \exp\{y/n + 2[x, y]/n^2\} \dots \exp\{y/n + n[x, y]/n^2\} \\ &= e^y e^x \exp\{[x, y] \sum_{k=1}^n k/n^2\} = e^y e^x \exp\{\frac{1}{2}[x, y]\} \end{aligned}$$

essendo passati al limite all'ultimo passaggio.

Una parametrizzazione del gruppo può essere scelta utilizzando una base nell'algebra ( $X_i$ ):  $g \in \mathcal{G} = \exp\{\sum x_i X_i\}$ . In questa parametrizzazione la funzione  $\phi(.,.)$ , che definisce la legge di composizione del gruppo, ammette uno sviluppo di Taylor molto semplice e universale:

$$\phi_i(x, y) = x_i + y_i + \frac{1}{2}c_{jki} x_j y_k + O(x^2 y, xy^2)$$

dove le costanti  $c$  sono definite da

$$(44) \quad [X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$$

Le costanti  $c_{ij}^k$  sono denominate le "costanti di struttura" del gruppo. Nel caso di  $\mathfrak{su}(2)$  ad esempio, nella base  $X_k = \frac{1}{2i}\sigma_k$  le costanti di struttura sono date dal simbolo di Ricci:

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ij}^k X_k$$

Lo studio delle rappresentazioni dei gruppi di Lie si può pertanto ricondurre al corrispondente problema per le algebre di Lie. Uno dei teoremi fondamentali di Lie riguarda il fatto che per caratterizzare completamente il gruppo è sufficiente fermarsi allo sviluppo di Taylor al secondo ordine e dunque alle costanti di struttura.

3.3.2. *Misura di integrazione invariante.* Allo scopo di estendere ai gruppi di Lie alcune caratteristiche interessanti dei gruppi finiti, è importante disporre di un sostituto per la "somma su tutti gli elementi" in termini di cui si esprimono le regole di ortogonalità per i caratteri. Questa somma permette di scrivere

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} f(g \circ g') = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g' \circ g) = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g)$$

<sup>¶</sup>per maggiori notizie su BCH si possono vedere le mie lezioni di teoria degli operatori lineari [[Ono09]] o le lezioni di Sternberg [[Ste94]]

L'analogo per un gruppo di Lie, con parametri  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  è costituito da una forma di integrazione sulla varietà del gruppo che soddisfi la condizione

$$\int_{\mathcal{G}} f(g) [dg] = \int_{\mathcal{G}} f(g \circ g') [dg] = \int_{\mathcal{G}} f(g' \circ g) [dg]$$

Una volta espresso in parametri si deve avere

$$\int \Phi(\alpha) f(\alpha) \prod_i d\alpha_i = \int \Phi(\alpha) f(\phi(\alpha, \beta)) \prod_i d\alpha_i = \int \Phi(\alpha) f(\phi(\beta, \alpha)) \prod_i d\alpha_i .$$

essendo  $\phi$  la funzione che rappresenta la composizione di due elementi, e  $\Phi$  una funzione positiva che costituisce la misura di integrazione. Si dimostra che per ogni gruppo di Lie esiste ed è unica la misura di integrazione invariante, nota come *misura di Haar*. Mentre rimandiamo al testo di Hamermesh per la trattazione generale, vogliamo vedere nel caso di gruppi di matrici come si può darne la forma esplicita.

Sia  $\mathcal{A}(g) = g^{-1} dg$ ; il significato è semplice:  $g$  è una matrice dipendente da un certo numero di parametri  $\alpha$  e  $dg$  è il differenziale  $dg = g(\alpha + d\alpha) - g(\alpha)$ . Si ha ovviamente  $\mathcal{A}(hg) = \mathcal{A}(g)$  e  $\mathcal{A}(gh) = h^{-1} \mathcal{A}(g) h$ . Ciò implica che possiamo definire una forma differenziale invariante di rango  $k$  attraverso la traccia del prodotto di  $k$  fattori uguali a  $\mathcal{A}$ :

$$\Omega_k = \text{Tr} \left[ \underset{\leftarrow k \text{ factors} \rightarrow}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}} \right]$$

Il simbolo  $\wedge$  indica il prodotto esterno di Cartan, noto dalla geometria differenziale. Se scegliamo  $k = r = \dim(\mathcal{G})$  possiamo utilizzare  $\Omega_r$  come misura invariante sul gruppo.

Esempio: per il gruppo delle matrici unitarie di determinante uno ( $SU(2)$ ) si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\alpha & d\beta \\ -d\bar{\beta} & d\bar{\alpha} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ -\bar{\omega}_2 & -\omega_1 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \bar{\alpha} d\alpha + \beta d\bar{\beta} \\ \omega_2 &= \bar{\alpha} d\beta - \beta d\bar{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ -\bar{\omega}_2 & -\omega_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ -\bar{\omega}_2 & -\omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1 \wedge \omega_1 - \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 & \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_1 \\ -\bar{\omega}_2 \wedge \omega_1 + \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 & \omega_1 \wedge \omega_1 - \bar{\omega}_2 \wedge \omega_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\omega}_2 \wedge \omega_2 & 2\omega_1 \wedge \omega_2 \\ 2\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 & \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I vari passaggi si capiscono alla luce del “calcolo di Cartan” delle forme esterne. La proprietà fondamentale è che per 1-forme il prodotto esterno è antisimmetrico (come il prodotto vettoriale)  $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$ .

Calcoliamo ora la terza potenza di  $\mathcal{A}$  di cui ci interessa solo la traccia, quindi non perdiamo tempo a calcolare i termini fuori diagonale:

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 \wedge \omega_2 + 2\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 & \dots \\ \dots & -2\bar{\omega}_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 \end{pmatrix}$$

da cui infine

$$dg_{\text{haar}} \equiv \text{Tr}[\mathcal{A}^3] = -6\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2$$

Si tratta ora di inserire l'espressione esplicita di  $\omega_i$  in termini dei parametri del gruppo. Tenendo conto del vincolo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  si può eliminare  $d\bar{\beta}$  e con pochi passaggi si trova, ignorando fattori numerici inessenziali,

$$(45) \quad dg_{\text{haar}} = \frac{1}{\beta} d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\beta$$

Se consideriamo i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  in termini delle loro parti reali e complesse, la condizione di determinante unitario equivale a  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ , ossia stiamo descrivendo la superficie di una sfera di raggio uno immersa nello spazio  $\mathbb{R}^4$ . Risulta naturale allora introdurre angoli (analoghi a quelli che si utilizzano sulla sfera in tre dimensioni) e precisamente

$$x_1 = \cos \theta, x_2 = \sin \theta \cos \psi, x_3 = \sin \theta \sin \psi \cos \phi, x_4 = \sin \theta \sin \psi \sin \phi$$

Si trova allora

$$d\alpha \wedge d\bar{\alpha} = -2i d(\cos \theta) \wedge d(\sin \theta \cos \theta) = -2i \sin^2 \theta \sin \psi d\theta \wedge d\psi$$

inoltre di  $d\beta$  ci interessa solo il termine che non contiene  $d\theta$  né  $d\psi$  e quindi  $d\beta \approx i\beta d\phi$ . Impacchettando tutto si trova allora

$$dg_{\text{haar}} = \mathcal{N} \sin^2 \theta \sin \psi d\theta \wedge d\psi \wedge d\phi$$

La costante arbitraria si può fissare in modo che il volume sia uno

$$\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} = \mathcal{N} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi^2 \mathcal{N}.$$

Notare che con queste definizioni di parametri, la traccia dell'elemento del gruppo coincide con  $2 \cos \theta$ , quindi  $\theta$  individua la classe di equivalenza cui appartiene l'elemento. Per una funzione invariante per coniugazione, e quindi solo funzione di  $\theta$ , si avrà

$$\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} f(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin^2 \theta d\theta$$

Per l'auto-rappresentazione  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  si ha  $\chi_{1/2} = \text{Tr}[\mathbf{u}] = 2 \cos \theta$ . Si calcola facilmente  $\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} \chi_{1/2} = 0$  e  $\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} s\chi_{1/2}^2 = 1$  che rappresentano esempi di relazioni di ortogonalità per i caratteri di  $\text{SU}(2)$ . Notare che per la rappresentazione vettoriale il carattere è dato da

$$\chi_1 = 1 + 2 \cos(2\theta)$$

come si può dedurre dalla Eq. (39). Si verifica allora che  $\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} \chi_{1/2} \chi_1 = 0$  e  $\int_{\text{SU}(2)} dg_{\text{haar}} \chi_1^2 = 1$ .

**3.4. Rappresentazione aggiunta (I).** Si consideri l'azione di un gruppo di Lie su se stesso dato dalla formula

$$(46) \quad \text{Ad}(g) : \mathfrak{h} \rightarrow g \mathfrak{h} g^{-1}$$

Quest'azione, detta *aggiunta*, lascia fissa l'identità e quindi quest'azione passa a una trasformazione sull'algebra di Lie: se  $g \in \mathcal{G}$ ,  $X \in \mathcal{L}$ ,  $g = \exp\{X\}$  si ha

$$(47) \quad \exp\{X\} \exp\{Y\} \exp\{-X\} = \exp\{Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \dots\}$$

il che mostra che l'azione aggiunta ristretta a elementi nell'intorno dell'identità definisce una rappresentazione lineare dell'algebra di Lie del gruppo

$$(48) \quad X \rightarrow \text{ad}_X Y = [X, Y]$$

detta la *rappresentazione aggiunta*. Se utilizziamo una base nell'algebra di Lie  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  con costanti di struttura  $c_{ij}^k$ , si trova che la matrice rappresentativa nella rappresentazione aggiunta dell'elemento  $X = \sum x_i X_i$  è direttamente esprimibile in termini di  $c$ :

$$X \rightarrow [X, X_j] = \sum [x_i X_i, X_j] = \sum x_i c_{ij}^k X_k$$

ovvero l'elemento  $X_i$  è rappresentato da  $(\mathcal{X}_i)_j^k = c_{ij}^k$ . Dallo studio della rappresentazione aggiunta si possono dedurre molte proprietà del gruppo, anche se non necessariamente si tratta di una rappresentazione fedele (ossia 1:1).

**3.5. Gruppi e algebre semplici.** Un gruppo è detto *semplice* quando non contiene sottogruppi invarianti (ossia costituiti dall'unione di classi di equivalenza). Formalmente  $\mathcal{G}$  è semplice se dato un qualunque suo sottogruppo  $\mathcal{H}$  non banale la coniugazione  $g\mathcal{H}g^{-1}$  non coincide con  $\mathcal{H}$  per almeno una scelta di  $g$ . Per l'algebra di Lie la condizione di traduce nella definizione di *ideale*:  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$  è un ideale se vale la proprietà

$$\forall x \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, h \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}} : [h, x] \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$$

o simbolicamente  $[\mathcal{L}_{\mathcal{H}}, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}] \subset \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ . Dunque vale l'associazione:  $\mathcal{H}$  è *sottogruppo invariante di  $\mathcal{G}$*   $\iff$   $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$  è un *ideale in  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$* . In questo caso lo spazio dei cosets  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  è a sua volta un gruppo la cui algebra di Lie è  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$  "modulo"  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ . I gruppi semplici sono caratterizzati dalla assenza di sottogruppi invarianti (e la loro algebra di Lie non ammette ideali).

**Esempio:**  $SO(3)$  è semplice. Un sottogruppo a un parametro è dato dalle rotazioni  $R_{n,\theta}$  intorno a un asse fisso; si tratta di un sottogruppo abeliano ma non invariante, infatti con  $R_{n',\psi} R_{n,\theta} R_{n',\psi}$  si può realizzare una rotazione intorno a un asse qualunque. Non esistono poi sottogruppi (continui) a due parametri in quanto con  $R_{n',\psi} R_{n,\theta}$  si realizza qualunque rotazione. Sull'algebra si può dire che se  $X$  è un elemento qualunque dell'algebra  $so(3)$  questo individua una sottoalgebra abeliana, ma certamente non un ideale:  $[X, Y] \propto X$  per ogni  $Y$  darebbe (assumendo che  $X$  sia il generatore delle rotazioni intorno all'asse  $x$ )

$$[X, aX + bY + cZ] = bZ - cY \propto X \implies b = c = 0$$

**Esempio:** il gruppo euclideo  $\mathcal{E}^d$  **non** è semplice. Infatti

$$g \in \mathcal{E} : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow R x + a$$

La composizione del gruppo si può caratterizzare con la moltiplicazione di matrici:

$$(R, a) \circ (R', a') \rightarrow \begin{pmatrix} R & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' & a' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RR' & a + R a' \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

e quindi la trasformazione inversa è data da

$$(R, a)^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1} a)$$

e componendo  $(R, b) \circ (\mathbf{1}, a) \circ (R, b)^{-1}$  si trova che il sottogruppo delle traslazioni è invariante. Per l'algebra, se le rotazioni corrispondono a  $\mathbf{J}$  e le traslazioni a  $\mathbf{p}$  si ha  $[\mathbf{J}, \mathbf{p}] \propto \mathbf{p}$ ,  $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = \mathbf{0}$  e quindi  $\mathbf{p}$  definisce un ideale.

◊. **Esempio:**  $SO(4)$ : il gruppo di rotazione e il gruppo di Lorentz in un numero qualunque di dimensioni sono gruppi semplici ad eccezione di  $dim=4$ ; infatti l'algebra di Lie ha una struttura del tipo

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}, \mathbf{J}] &\subset \mathbf{J} \\ [\mathbf{J}, \mathbf{K}] &\subset \mathbf{K} \\ [\mathbf{K}, \mathbf{K}] &\subset \mathbf{J} \end{aligned}$$

tuttavia nella base  $\mathbf{M}_\pm = \mathbf{J} \pm \mathbf{K}$  si scopre che le due sottoalgebre  $\mathbf{M}_+$  e  $\mathbf{M}_-$  commutano e quindi sono entrambe ideali. Si utilizza il termine “semisemplice” per il caso in cui esistono sottogruppi invarianti (ideali nell'algebra di Lie) ma nessuno di questi è Abeliano. ◀

◊. Il gruppo di Poincaré è il gruppo delle trasformazioni affini nello spazio di Minkowsky che lasciano invariante l'intervallo spazio-temporale:

$$x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu$$

essendo  $a_\mu$  un tetravettore arbitrario e  $\Lambda$  una matrice che rappresenta una trasformazione di Lorentz. Il gruppo è analogo al gruppo Euclideo, ma relativo alla metrica di Minkowsky. La legge di composizione è

$$(\Lambda', a') \circ (\Lambda, a) = (\Lambda' \Lambda, a' + \Lambda' a)$$

e l'elemento inverso

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a)$$

Si verifica allora facilmente che il sottogruppo abeliano delle traslazioni è invariante

$$(\Lambda, a)^{-1} \circ (\mathbf{1}, b) \circ (\Lambda, a) = (\mathbf{1}, \Lambda^{-1} b).$$

**3.6. Rappresentazioni lineari.** Per i gruppi di Lie si può rinnovare senza modifiche la definizione di rappresentazione lineare. Ogni simmetria continua di un sistema fisico quantistico si realizza attraverso trasformazioni unitarie nello spazio degli stati, che è uno spazio lineare (di Hilbert). Quindi la classificazione delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria è cruciale per individuare la struttura a multipletti dello spettro di energia di un qualunque sistema quantistico.

Partiamo da un esempio semplice. Si considera l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico isotropo in due gradi di libertà.

$$H = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2.$$

Dato che possiamo scrivere H come

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

è evidente che qualunque trasformazione unitaria

$$(49) \quad \begin{aligned} a_1 &\rightarrow \alpha a_1 + \beta a_2 \\ a_2 &\rightarrow \bar{\alpha} a_2 - \bar{\beta} a_1 \end{aligned}$$

lascia l'Hamiltoniana invariante; inoltre le regole di commutazione sono inalterate - e questo è essenziale per concludere che la dinamica quantistica è invariante sotto un gruppo di matrici unitarie  $2 \times 2$ . La considerazione sulle regole di commutazione è importante. Se ragionassimo in termini unicamente di invarianza formale della Hamiltoniana e la esprimessimo come

$$H = 1/2(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$$

saremmo indotti a considerare trasformazioni lineari che lascino invariante la forma quadratica - cioè un gruppo  $SO(4)$  - in realtà il gruppo di simmetria è dato dall'intersezione di  $SO(4)$  con il gruppo delle trasformazioni canoniche lineari - il gruppo simplettico  $Sp(2, \mathbb{R})$  - e questa intersezione è giusto  $SU(2)$  (vedi appendice). Prendiamo ora un generico livello energetico e vediamo come le trasformazioni di simmetria agiscono sugli stati del sottospazio. Sia  $|n_1, n_2\rangle =$

$\mathbf{a}_1^{\dagger n_1} \mathbf{a}_2^{\dagger n_2} |0\rangle$  un autovettore di  $H$  con autovalore  $n_1 + n_2$ . Agendo con la trasformazione Eq.(49) si avrà

$$\begin{aligned}
|n_1, n_2\rangle' &= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2)^{\dagger n_1} (-\bar{\beta} \mathbf{a}_1 + \bar{\alpha} \mathbf{a}_2)^{\dagger n_2} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \sum_{h,k} \mathcal{D}_{k,h}(\alpha, \beta) \mathbf{a}_1^{\dagger k} \mathbf{a}_2^{\dagger(n_1-k)} \mathbf{a}_1^{\dagger h} \mathbf{a}_2^{\dagger(n_2-h)} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \sum_{h,k} \mathcal{D}_{k,h} \mathbf{a}_1^{\dagger(k+h)} \mathbf{a}_2^{\dagger(n_1+n_2-k-h)} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \sum_{n=0}^{n_1+n_2} \sum_{m=0}^n \mathcal{D}_{(n+m)/2, (n-m)/2} \mathbf{a}_1^{\dagger n} \mathbf{a}_2^{\dagger(n_1+n_2-n)} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \sum_{n=0}^{n_1+n_2} \sum_{m=0}^n \sqrt{n!(n_1+n_2-n)!} \mathcal{D}_{(n+m)/2, (n-m)/2} |n, n_1+n_2-n\rangle
\end{aligned}$$

(con  $\sum'_m$  si intende che  $m$  prende solo quei valori per cui  $n+m$  è un numero pari). Se esplicitiamo la dipendenza di  $\mathcal{D}_{h,k}$  da  $\alpha, \beta$  otteniamo le matrici della rappresentazione di  $SU(2)$  di dimensione  $n_1 + n_2 + 1$ .

Da un altro punto di vista, possiamo utilizzare il linguaggio degli stati coerenti e ragionare come segue: gli stati coerenti sono individuati da due variabili complesse

$$\langle z_1, z_2 | n_1, n_2 \rangle = \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}}$$

quindi un generico vettore del sottospazio di energia  $N$  è dato da un polinomio omogeneo in  $z_1, z_2$  di grado  $N$ . Sotto una trasformazione unitaria si avrà che il polinomio si trasforma in

$$(50) \quad p(z_1, z_2) \rightarrow p(\bar{\alpha} z_1 - \beta z_2, \bar{\beta} z_1 + \alpha z_2)$$

Ora un polinomio omogeneo di grado  $N$  è sempre esprimibile come un polinomio di grado  $N$  nella variabile  $z = z_1/z_2$  moltiplicato per  $z_2^N$ . Sia dunque  $p(z_1, z_2) = z_2^N f(z)$ . Allora la trasformazione data dall'Eq.(50) si traduce per  $f(z)$  nella già nota

$$f(z) \rightarrow (\bar{\beta} z + \alpha)^N f\left(\frac{\bar{\alpha} z - \beta}{\bar{\beta} z + \alpha}\right)$$

che è quanto conosciamo già come rappresentazioni indotte.

**Esempio di  $SU(3)$ :** passiamo all'oscillatore armonico isotropo in tre gradi di libertà per il quale  $H = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^{\dagger} \mathbf{a}_i$ , essendo al solito  $\mathbf{a}_i^{\dagger}$  e  $\mathbf{a}_i$  operatori canonici di creazione–distruzione. Gli stessi argomenti precedenti mostrano che  $L$ 'Hamiltoniano è invariante rispetto alle trasformazioni unitarie  $\mathbf{a}_i \rightarrow \sum \mathbf{U}_{ij} \mathbf{a}_j$ . Il sottogruppo abeliano  $\mathbf{a}_k \rightarrow e^{i\Phi} \mathbf{a}_k$  è irrilevante in quanto produce solo uno sfasamento sugli stati, dunque la simmetria che interessa è quella delle trasformazioni unitarie  $3 \times 3$  a determinante uguale a uno, in gergo  $SU(3)$ . Diamo un'occhiata alle dimensioni delle rappresentazioni unitarie di questo gruppo, ammettendo che i livelli energetici corrispondano a rappresentazioni irriducibili.

- a) Ground state: singoletto
- b) Primo livello: tripletto, e cioè  $|1, 0, 0\rangle, |0, 1, 0\rangle, |0, 0, 1\rangle$ .
- c) Secondo livello: sestupletto  $|2, 0, 0\rangle, |0, 2, 0\rangle, |0, 0, 2\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 0, 1\rangle, |0, 1, 1\rangle$ .
- d) Terzo livello: decupletto  $|3, 0, 0\rangle, |0, 3, 0\rangle, |0, 0, 3\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 0, 1\rangle, |1, 2, 0\rangle, |0, 2, 1\rangle, |0, 1, 2\rangle, |1, 0, 2\rangle, |1, 1, 1\rangle$
- ...



e) N-esimo livello: la degenerazione è data dal numero di distribuzioni di N oggetti in tre contenitori <sup>||</sup> e cioè  $(N+1)(N+2)/2$

Saranno queste tutte le IRREP's di SU(3)? Vedremo che la risposta sarà **negativa**. L'oscillatore armonico non è molto utile per analizzare le IRREP's di SU(3), ad es. manca l'ottetto che è fondamentale nel modello a quarks. Intanto però vediamo come si caratterizzano le IRREP's dell'oscillatore in termini di osservabili. Così come i livelli del caso bidimensionale sono sede di una IRREP di SU(2) e lo spettro del generatore  $s_3$  è dato da  $-n/2, -n/2+1, \dots, n/2-1, n/2$  nell'n-esimo livello eccitato, così possiamo analizzare il caso tridimensionale in termini di generatori di SU(3). Prendiamo le trasformazioni unitarie diagonali

$$(51) \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_8 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\phi} \end{pmatrix},$$

L'azione di  $\mathbf{u}_3$  e  $\mathbf{u}_8$  sugli stati  $|n_1, n_2, n_3\rangle$  è facile da calcolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 |n_1, n_2, n_3\rangle &= e^{i(n_1-n_2)\phi} |n_1, n_2, n_3\rangle \\ \mathbf{u}_8 |n_1, n_2, n_3\rangle &= e^{i(n_1+n_2-2n_3)\phi} |n_1, n_2, n_3\rangle \end{aligned}$$

Da questo si deduce lo spettro dei generatori  $\lambda_3, \lambda_8$ , definiti da  $\mathbf{u}_j = \exp\{i\lambda_j \phi\}$ . Gli autovalori sono organizzati nelle tabelle 1-3. **NB**: la convenzione usuale nel modello di Gellman normalizza il generatore  $\lambda_8$  in modo differente:

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

IRREP <b>3</b>		
$n_1, n_2, n_3$	$\lambda_3$	$\sqrt{3}\lambda_8$
1 0 0	1	1
0 1 0	-1	1
0 0 1	0	-2

TABELLA 1

IRREP <b>6</b>		
$n_1, n_2, n_3$	$\lambda_3$	$\sqrt{3}\lambda_8$
2 0 0	2	2
0 2 0	-2	2
0 0 2	0	-4
1 1 0	0	2
1 0 1	1	-1
0 1 1	-1	-1

TABELLA 2

<sup>||</sup>  $\sum_{k \geq 0; h \geq 0, k+h \leq N} 1$  coincide con la somma degli interi da 1 a N.

IRREP <b>10</b>		
$n_1, n_2, n_3$	$\lambda_3$	$\sqrt{3}\lambda_8$
3 0 0	3	3
0 3 0	-3	3
0 0 3	0	-6
2 1 0	1	3
2 0 1	2	0
1 2 0	-1	3
0 2 1	-2	0
1 0 2	1	-3
0 1 2	-1	-3
1 1 1	0	0

TABELLA 3

Se riportiamo i punti dello spettro in un diagramma cartesiano troviamo che gli autovalori si dispongono su un reticolo triangolare regolare (se adottiamo la convenzione di Gellmann, quindi dividendo per  $2/\sqrt{3}$  il valore in tabella per  $\lambda_8$ ).

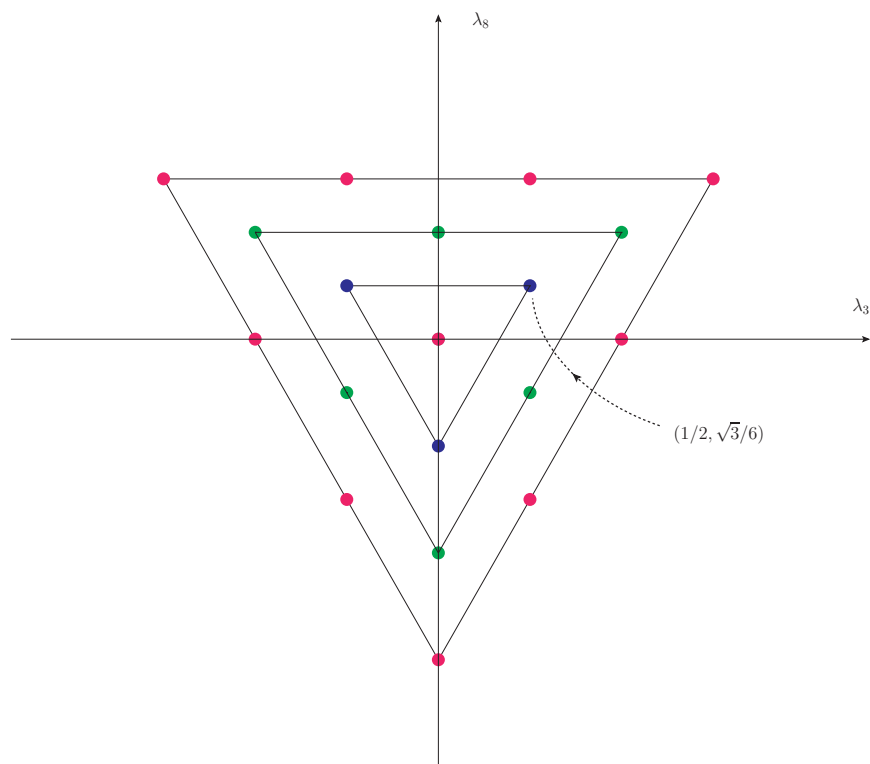


FIGURA 1. Spettro di  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  nei primi livelli dell'oscillatore 3D (la scala è adattata alla convenzione di Gellmann).

Rimandiamo a più avanti lo studio delle rappresentazioni irriducibili di  $SU(3)$ , quando avremo visto l'impostazione generale valida per ogni gruppo semisemplice.

3.6.1. *Appendice:*  $O(4) \cap Sp(2) \approx U(2)$ . Una matrice  $4 \times 4$   $R \in O(4)$  deve soddisfare il vincolo

$$R = R^T$$

e quindi se  $R = \exp\{\chi\}$  si deve avere  $\chi^T = -\chi$ . Perché  $R$  sia anche in  $Sp(2)$  si deve richiedere  $R J R^T = J$  dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi  $\chi J = J \chi$ . Se caratterizziamo la matrice  $\chi$  a blocchi

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_3 & \chi_4 \end{pmatrix}$$

si dovrà avere contemporaneamente

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\chi_1^T & \chi_4 &= -\chi_4^T \\ \chi_2 &= -\chi_3^T & \chi_3 &= -\chi_2 \\ \chi_4 &= \chi_1 & \chi_3 &= -\chi_2 \end{aligned}$$

dunque

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ -\chi_2 & \chi_1 \end{pmatrix}$$

con  $\chi_1$  antisimmetrica e  $\chi_2$  simmetrica, quindi in tutto **quattro** parametri reali. Per identificare la struttura del gruppo conviene individuare una base:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora possiamo verificare le relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= 0 \\ [X_i, X_j] &= \epsilon_{ijk} X_k \end{aligned}$$

Questo significa che  $X_0$  genera un sottogruppo invariante mentre  $X_i$ , ( $i=1,2,3$ ) genera un sottogruppo isomorfo a  $SU(2)$ , complessivamente  $U(2)$ . Per l'oscillatore armonico bidimensionale isotropo  $X_0$  corrisponde all'Hamiltoniana, mentre gli altri tre generatori rappresentano l'algebra di simmetria. Per esercizio si ricavi l'espressione dei generatori  $X_i$  in termini di operatori canonici.

**3.7. Rappresentazione aggiunta (II).** Riprendiamo lo studio della rappresentazione aggiunta. Questa riflette particolare importanza per i gruppi semisemplici, in quanto risulta una rappresentazione fedele dell'algebra e quindi siamo certi di non perdere nulla prendendola a base dello studio delle rappresentazioni più generali (seguiamo il testo di B. Hall [[Hal03]]).

Si definisce pertanto

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

la rappresentazione dell'algebra  $\mathcal{L}$  su sé stessa. Che si tratti di una rappresentazione segue dalla relazione

$$[\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z] \equiv \text{ad}_{[X, Y]}(Z)$$

che discende dalla identità di Jacobi. Studiamo adesso la rappresentazione aggiunta di  $\mathfrak{su}(3)$  Conviene inizialmente scegliere una base particolarmente semplice, diversa da quella di Gellman, cui torneremo più avanti:

$$(52) \quad \begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & Y_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da notare che  $H_1 + 2H_2 = \lambda_8$ , quindi non sarà difficile riprendere contatto con la base di Gellmann.

Ora è questione solo di pazienza ricavare tutte le relazioni di commutazione in questa base:

$$(53) \quad \begin{aligned} [H_1, X_1] &= 2X_1 & [H_1, Y_1] &= -2Y_1 \\ [H_1, X_2] &= -X_2 & [H_1, Y_2] &= Y_2 \\ [H_1, X_3] &= X_3 & [H_1, Y_3] &= -Y_3 \end{aligned}$$

$$(54) \quad \begin{aligned} [H_2, X_1] &= -X_1 & [H_2, Y_1] &= Y_1 \\ [H_2, X_2] &= 2X_2 & [H_2, Y_2] &= -2Y_2 \\ [H_2, X_3] &= X_3 & [H_2, Y_3] &= -Y_3 \end{aligned}$$

$$(55) \quad \begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3 & [X_2, X_3] &= 0 & [X_3, X_1] &= 0 \\ [Y_1, Y_2] &= -Y_3 & [Y_2, Y_3] &= 0 & [Y_3, Y_1] &= 0 \\ [X_1, Y_1] &= H_1 & [X_1, Y_2] &= 0 & [X_1, Y_3] &= -Y_2 \\ [X_2, Y_1] &= 0 & [X_2, Y_2] &= H_2 & [X_2, Y_3] &= Y_1 \\ [X_3, Y_1] &= X_2 & [X_3, Y_2] &= -X_1 & [X_3, Y_3] &= H_1 + H_2 \end{aligned}$$

La struttura delle regole di commutazione presenta una notevole regolarità, che più avanti risulterà facilmente decifrabile e generalizzabile a  $\mathfrak{su}(N)$

Si nota che se isoliamo gli elementi  $H_1$  e  $H_2$ , commutanti tra loro, le relazioni di commutazione sono della forma

$$[H_i, X_\alpha] = \alpha_i X_\alpha \quad [H_i, Y_\alpha] = -\alpha_i Y_\alpha$$

dove

$$\alpha_1 = (2, -1)$$

$$\alpha_2 = (-1, 2)$$

$$\alpha_3 = (1, 1)$$

e s'intende che  $X_{\alpha_1} \equiv X_1$ , etc. I tre vettori  $\alpha_i$  si dicono *le radici* dell'algebra di  $\mathfrak{su}(3)$ . Il fatto che siano due, il che qualifica il gruppo come un gruppo semisemplice di rango 2, discende quest'idea: cerchiamo una sottoalgebra abeliana  $\{H_1, H_2, \dots\}$  di dimensione più grande possibile tale che  $\text{ad}_{H_i}$  siano matrici diagonalizzabili. La sottoalgebra è detta "*di Cartan*" e la sua dimensione definisce il rango del gruppo. La condizione di diagonalizzabilità è essenziale. Il gruppo Euclideo in 4 dim ha per esempio un sottogruppo abeliano (le traslazioni) di dimensione 4 ma il rango è solo 2.

È chiaro che gli elementi  $X_i$  e  $Y_i$  rappresentano per  $\mathfrak{su}(3)$  quello che gli innalzatori e abbassatori  $J_{\pm}$  rappresentano per l'algebra del momento angolare ( $\mathfrak{su}(2)$ ). Utilizzando le relazioni di commutazione in questa forma si possono costruire **tutte** le rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{su}(3)$  (e di tutti i gruppi semisemplici).

Utilizzando lo spazio delle radici si può facilmente individuare il principio generale su cui si basano le regole di commutazione (53–55): associamo gli elementi  $X_1, \dots, Y_3$  alle corrispondenti radici. Si controlla allora facilmente che

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = \begin{cases} X_{\alpha+\beta} & \text{se } \alpha + \beta \text{ è una radice} \\ c_1 H_1 + c_2 H_2 & \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove le costanti  $c_i$  sono determinate univocamente secondo quanto illustrato nel caso generale nei teoremi a Pag. 40. L'ingrediente essenziale si rivela essere l'identificazione di sottoalgebre  $\mathfrak{su}(2)$  dell'algebra  $\mathfrak{su}(3)$  o di qualunque altra algebra semisemplice. In particolare nella base di  $\mathfrak{su}(3)$  finora considerata, troviamo che  $\{\frac{1}{2}H_1, X_1, Y_1\}$  e  $\{\frac{1}{2}H_2, X_2, Y_2\}$  costituiscono due sottoalgebre isomorfe a quella del momento angolare e pertanto in qualunque rappresentazione dell'algebra lo spettro di  $H_1$  e  $H_2$  è costituito da numeri interi.

**3.8. Metrica di Killing.** Nello spazio delle radici è utile introdurre una metrica Riemanniana, ossia un prodotto scalare che possa dare un significato a ortogonalità tra vettori e lunghezza di vettori. Si comincia introducendo una forma metrica sull'algebra. Si definisce la *forma di Killing–Cartan*

$$K(X, Y) \equiv \text{Tr}[\text{ad}_X \text{ad}_Y] \quad (\forall X \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{L})$$

Si controllano facilmente le proprietà seguenti:

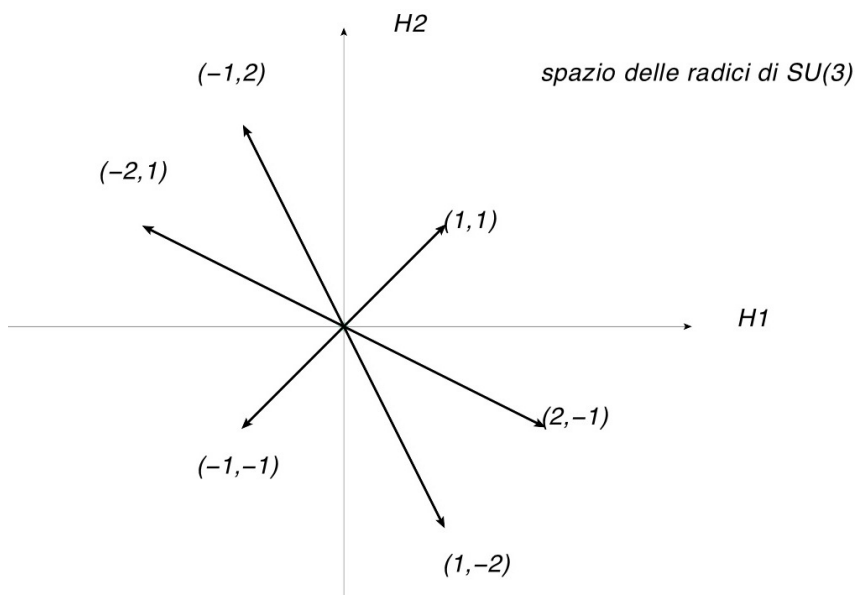
$$K(X, Y) = K(Y, X)$$

$$K([X, Y], Z) = K(X, [Y, Z])$$

ossia

$$K(\text{ad}_Y(X), Z) = -K(X, \text{ad}_Y(Z))$$

dunque  $\text{ad}_Y$  è antisimmetrico rispetto alla metrica  $K$ . Il calcolo di  $K$  può risultare laborioso. In realtà per i gruppi semisemplici il compito è semplificato in quanto si può dimostrare che  $K(X, Y) \propto \text{Tr}[X, Y]$  dove la traccia è presa nella rappresentazione fondamentale (si veda Helgason, Cap.III).

FIGURA 2. Lo spazio delle radici di  $\mathfrak{su}(3)$  nella base naturale.

Esempio: Il caso più semplice è quello di  $\mathfrak{su}(2)$ . Scegliamo la base

$$(56) \quad \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con le regole di commutazione

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{x}] = 2\mathfrak{x}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{y}] = -2\mathfrak{y}, \quad [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = \mathfrak{h}$$

Se indichiamo con  $|X\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$  un generico elemento dell'algebra, si avrà

$$\text{ad}_{\mathfrak{h}}|X\rangle = [[\mathfrak{h}, \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{h}]] = |2\xi\mathfrak{x} - 2\eta\mathfrak{y} + 0\mathfrak{h}\rangle$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{x}}|X\rangle = [[\mathfrak{x}, \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{h}]] = |-2\zeta\mathfrak{x} + 0\mathfrak{y} + \eta\mathfrak{h}\rangle$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{y}}|X\rangle = [[\mathfrak{y}, \xi\mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \zeta\mathfrak{h}]] = |0\mathfrak{x} + 2\zeta\mathfrak{y} - \xi\mathfrak{h}\rangle$$

e quindi si trovano le matrici rappresentative di  $\text{ad}$ .

$$\text{ad}_{\mathfrak{h}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{x}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}_{\mathfrak{y}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e infine si trova la forma di Killing

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si controlla facilmente che  $K$  è esattamente 4 volte la traccia calcolata sulle matrici dell'Eq.(56). Si trova che la matrice di Killing è invertibile e questa è una caratteristica distintiva delle algebre semisemplici. Si ha infatti

**TEOREMA 3.1.** [Cartan] *Un'algebra di Lie è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non-singolare.*

C'è sempre la libertà di cambiare base nell'algebra, ma ovviamente questa proprietà è invariante. Se adattiamo l'algebra in modo che gli elementi di base siano *antihermitiani* e quindi una volta esponenti generino elementi del gruppo  $SU(2)$  troviamo:

$$X_3 = \frac{1}{2} i h, \quad X_1 = \frac{1}{2} i(x + y), \quad X_2 = \frac{1}{2} i(x - y) \\ K \rightarrow -2 \mathbf{1}_3$$

che riflette la proprietà generale secondo cui la *forma di Killing di un gruppo compatto è negativa definita*.

**3.9. Sottoalgebra di Cartan.** Vediamo ora qual'è in generale la struttura delle algebre semisemplici. Si inizia definendo una sottoalgebra  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}$  "toroidale" se è formata da tutti elementi diagonalizzabili (una via spiccia per dire che la matrice rappresentativa  $\text{ad}$  lo è). Non ci vuole molto per scoprire che una sottoalgebra toroidale è abeliana! Infatti: sia  $x \in \mathcal{T}$  e sia  $\mathfrak{a}$  un suo autovalore non nullo, e cioè

$$\text{ad}_x(\mathfrak{y}) = \mathfrak{a} \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{a} \neq 0, \quad \mathfrak{y} \in \mathcal{T}$$

allora  $\text{ad}_y(x) = -\mathfrak{a} \mathfrak{y}$  è autovettore di  $\text{ad}_y$  con autovalore zero. Per ipotesi  $x$  è sviluppabile sulla base degli autovettori di  $\text{ad}_y$

$$x = \sum_i \beta_i v_i, \quad \text{ad}_y v_i = \alpha_i v_i$$

da cui

$$\text{ad}_y(x) = \sum_i \alpha_i \beta_i v_i = -\mathfrak{a} \mathfrak{y}$$

In questa uguaglianza compaiono nella somma gli autovettori di  $\text{ad}_y$  con autovalore non nullo mentre il risultato è dato da un autovettore con autovalore nullo. Ciò mostra che è contraddittorio assumere  $\mathfrak{a} \neq 0$  e tutti i commutatori in  $\mathcal{T}$  devono essere nulli.

Si definisce sottoalgebra di Cartan una *sottoalgebra toroidale di dimensione massima possibile* e la sua dimensione si dice il rango dell'algebra. Ad es. per  $\mathfrak{su}(3)$  una sottoalgebra di Cartan è costituita dalle matrici diagonali - la condizione di traccia nulla implica che la dimensione sia due. Per  $\mathfrak{su}(N)$  si ha analogamente la sottoalgebra di Cartan delle matrici diagonali a traccia nulla - per cui il rango è  $n - 1$ .

Sia  $\mathcal{H}$  una sottoalgebra di Cartan. Allora tutti gli elementi di  $\mathcal{H}$  possono essere diagonalizzati contemporaneamente e l'algebra di Lie si decompone nella somma diretta

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi}^{\oplus} \mathcal{L}_{\alpha}$$

dove  $\mathcal{L}_{\alpha}$  è il sottospazio individuato dagli autovettori corrispondenti agli autovalori  $\alpha$  (le *radici*) e  $\Phi$  è l'insieme delle radici, cioè l'insieme delle n-pole di autovalori non-nulli degli elementi di  $\mathcal{H}$

(se esistessero autovettori con autovalore nullo non già contenuti in  $\mathcal{H}$ , questi si potrebbero aggiungere ad  $\mathcal{H}$  contrariamente all'ipotesi di massimalità). Le radici  $\alpha \in \Phi$  si possono considerare come funzionali lineari definiti su  $\mathcal{H}$ , nel senso che vale l'equazione agli autovalori

$$[\mathfrak{h}, x] = \alpha(\mathfrak{h}) x$$

e la dipendenza di  $\alpha$  da  $\mathfrak{h}$  è ovviamente lineare. Vediamo alcune proprietà della decomposizione secondo le radici di un'algebra di Cartan.

**TEOREMA 3.2.** *Valgono le proprietà seguenti:*

- a)  $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \in \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$
- b) se  $\alpha + \beta \neq 0$  allora  $\mathcal{L}_\alpha \perp \mathcal{L}_\beta$  nella metrica di Killing;
- c) gli elementi  $x \in \mathcal{L}_\alpha$  sono nilpotenti.

*Prova.* La prima affermazione è una conseguenza dell'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{h}}([x, y]) &= [[\mathfrak{h}, x], y] + [x, [\mathfrak{h}, y]] = \alpha(\mathfrak{h})[x, y] + \beta(\mathfrak{h})[x, y] \\ &= (\alpha + \beta)(\mathfrak{h})[x, y] \end{aligned}$$

La seconda discende dal fatto che  $\text{ad}_x$  è antisimmetrico rispetto alla forma di Killing e pertanto

$$\alpha(\mathfrak{h}) K(x, y) = K([\mathfrak{h}, x], y) = -K(x, [\mathfrak{h}, y]) = -\beta(\mathfrak{h}) K(x, y)$$

e quindi  $(\alpha + \beta)(\mathfrak{h}) K(x, y) = 0$ . Quanto alla terza affermazione, si ha

$$\begin{aligned} \text{ad}_x(y) &= \text{ad}_x \left( y_0 + \sum_{\beta} y_{\beta} \right) \\ &= -\alpha(y_0) x + \sum_{\beta} [x, y_{\beta}] \end{aligned}$$

$$\text{ad}_x^2(y) = \sum_{\beta} [x, [x, y_{\beta}]]$$

Continuando ad applicare  $\text{ad}_x$  il risultato è dato da commutatori successivi che per la proprietà (1) appartengono al sottospazio  $\mathcal{L}_{n\alpha+\beta}$  e per qualche potenza dovrà essere nullo. Se  $n$  è il massimo valore di questa potenza, segue che  $\text{ad}_x$  ha una potenza  $n$ -esima identicamente nulla. ■

Una conseguenza immediata è che la forma di Killing, ristretta alla sottoalgebra di Cartan è non-degenere; infatti la forma di Killing, per via della proprietà di ortogonalità, si decompone a blocchi lungo la diagonale e ciascuno di questi deve avere determinante non nullo.

Ne segue, dal teorema di Riesz, una corrispondenza biunivoca tra radici e elementi della sottoalgebra di Cartan: ogni radice  $\alpha \in \Phi$  è della forma

$$\alpha(\mathfrak{h}) = K(\mathfrak{t}_\alpha, \mathfrak{h})$$

e inoltre anche lo spazio delle radici è dotato di una metrica, quella ereditata dalla forma di Killing:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = K(\mathfrak{t}_\alpha, \mathfrak{t}_\beta)$$

Indicando con  $K$  la forma metrica ristretta alla sottoalgebra di Cartan, la metrica indotta nello spazio delle radici è data dalla matrice inversa (è lo stesso principio per cui passando da vettori controvarianti  $x^\mu$  a covarianti  $y_\mu$ , la metrica si trasforma da  $g_{\mu\nu}$  a  $g^{\mu\nu}$  con  $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$ ).



Nell'esempio di  $\mathfrak{su}(3)$  nella base data in Eq.(52) la metrica risulta

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K_{\text{inv}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pertanto i prodotti scalari delle radici sono  $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , dove l'indice corre solo da 1 a 2, cioè su quelle che verranno chiamate "radici primitive". Infatti

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= (2 \ -1) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= (2 \ -1) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}$$

Un altro esempio importante:  $\mathfrak{su}(N)$  La base della sottoalgebra di Cartan può essere scelta così :

$$(H_i)_{mn} = \delta_{m,n} \delta_{m,i} - \delta_{m,n} \delta_{m,(i+1)} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

La forma di Killing, ristretta alla sottoalgebra di Cartan, si trova facilmente calcolando  $\text{Tr}[H_i, H_j]$  ed è data esplicitamente da

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa si calcola senza difficoltà ricordando che la matrice K coincide con il laplaciano discreto con condizioni al contorno di annullamento. Autovalori e autofunzioni sono ben noti (modi normali di una catena lineare di oscillatori armonici). Si ha che  $K^{-1}$  è una matrice "iperbolica" con prima riga  $\{n-1, n-2, \dots, 2, 1\}/n$ , ad es. per  $n = 10$

$$K_{10}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Si veda l'appendice per i calcoli dettagliati e anche [Ono09].

**3.10. Lo spazio delle radici.** Diamo qui senza dimostrazione una serie di proprietà interessanti riguardo lo spazio delle radici (si veda il testo di Humphreys, Sec.III ([Hum72]), Hall, Part II ([Hal03])).

**TEOREMA 3.3.** *Sia  $\Phi$  l'insieme delle radici dell'algebra di Lie semisemplice  $\mathcal{L}$ ; allora*

- a) *Se  $\alpha \in \Phi$  anche  $-\alpha \in \Phi$ ;*
- b) *se  $x \in \mathcal{L}_\alpha, y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$  allora  $[x, y] = K(x, y) t_\alpha$ ;*
- c)  *$\alpha(t_\alpha) = K(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ ;*
- d) *Per  $x \in \mathcal{L}_\alpha$  esiste un  $y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$  tale che la terna  $\{x, y, h = [x, y]\}$  forma una sottoalgebra di  $\mathcal{L}$  isomorfa a quella di  $\mathfrak{su}(2)$ .*

**TEOREMA 3.4.** Sia  $h_\alpha = 2t_\alpha/\alpha(t_\alpha)$ , cioè  $h_\alpha$  è uguale a  $t_\alpha$  normalizzato in modo che  $\alpha(h_\alpha) = 2$ . Allora

- a) per ogni  $\alpha \in \Phi$ ,  $\mathcal{L}_\alpha$  è monodimensionale, e  $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ ,  $y_\alpha \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ , e  $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$  formano una sottoalgebra di  $\mathcal{L}$  isomorfa a  $\mathfrak{su}(2)$ .
- b)  $-\alpha$  è l'unica radice proporzionale a  $\alpha$ ;
- c) per ogni scelta di radici  $\alpha, \beta \in \Phi$  si ha che  $\beta(h_\alpha)$  è un numero intero e inoltre  $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha$  è una radice;
- d) Se  $\alpha, \beta$  e  $\alpha + \beta$  sono in  $\Phi$  allora  $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ ;
- e) siano  $\alpha, \beta$  in  $\Phi$ ,  $\alpha + \beta \neq 0$ , e siano  $r$  e  $q$  gli interi più grandi tali che  $\beta - r\alpha$  e  $\beta + q\alpha$  siano radici; allora tutta la fila  $\beta + n\alpha$  con  $-r \leq n \leq q$  è contenuta in  $\Phi$ ; inoltre  $\beta(h_\alpha) = r - q$ .

Per esercizio si verifichino queste proprietà sullo spazio delle radici definite per  $\mathfrak{su}(3)$  nella base Eq.(52).

3.10.1. *Base duale.* Nella costruzione delle rappresentazioni irriducibili è utile introdurre la base duale

$$(57) \quad \langle \tilde{\alpha}_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$

Nel caso di  $\mathfrak{su}(3)$  si ha semplicemente

$$\alpha_1 = (2, -1), \quad \alpha_2 = (-1, 2)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (1, 0), \quad \tilde{\alpha}_2 = (0, 1)$$

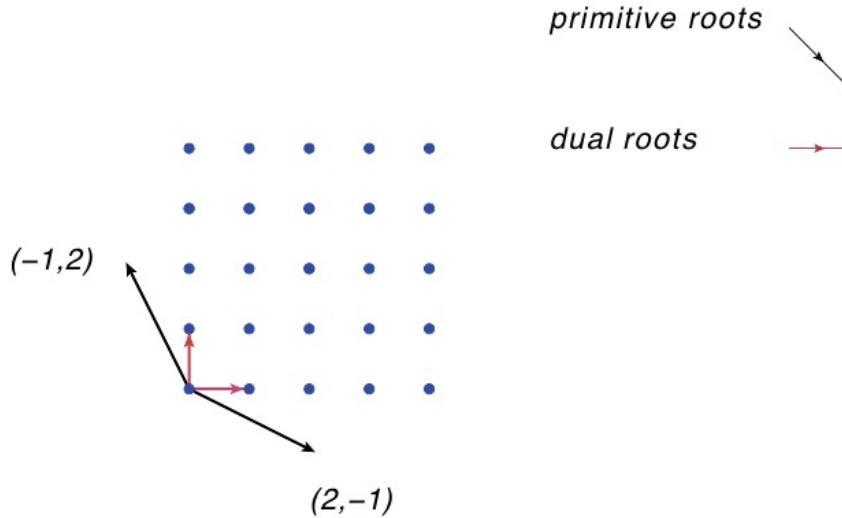


FIGURA 3. Il reticolo dei pesi di  $\mathfrak{su}(3)$

In figura sono indicati i nodi del reticolo  $\mu_{n_1, n_2} = n_1 \tilde{\alpha}_1 + n_2 \tilde{\alpha}_2$  con  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ . Vedremo che ad ogni punto del reticolo corrisponde una rappresentazione unitaria irriducibile.

3.11. **La metrica di Cartan.** Oltre alla metrica indotta sull'algebra di Cartan dalla forma di Killing, si utilizza un'altra forma che aiuta nel classificare le algebre di Lie semisemplici, dovuta a Cartan. Indicando con  $(\cdot, \cdot)$  la metrica di Killing, si introduce la matrice

$$A_{\alpha, \beta} \equiv \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

dove gli indici sono direttamente le radici semplici dell'algebra. Si noti che la matrice è in generale non simmetrica, e che per costruzione  $A_{\alpha,\alpha} = 2$ . Per  $\mathfrak{su}(N)$  la forma di Cartan è simmetrica e coincide con la restrizione della metrica di Killing. Si utilizzerà questa matrice nel cap.5.1.

**3.12. Il gruppo di Weyl.** L'insieme delle radici gode di particolari simmetrie. Queste sono costituite da riflessioni negli iperpiani ortogonali alle radici. In pratica si definisce per ogni  $\mu$  nello spazio delle radici

$$(58) \quad \mathcal{W}_\alpha(\mu) = \mu - 2\alpha \frac{\langle \alpha | \mu \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

Vediamo a cosa corrispondono nel caso di  $\mathfrak{su}(3)$  cominciando con  $\alpha_1 = (2, -1)$ .

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 | \mu \rangle &= \frac{1}{3} (2, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \\ \mathcal{W}_1(\mu) &= \mu - \mu_1 \alpha_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\mu_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ne segue per es. che  $\mathcal{W}_1(\alpha_1) = -\alpha_1$ ,  $\mathcal{W}_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1)$ . Il quadro completo delle riflessioni è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{W}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{W}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nella fig.3.12 si vede qual'è l'effetto delle riflessioni. La particolare metrica "sgheмба" in questa base non aiuta a visualizzare in modo intuitivo la geometria del sistema di radici. Tuttavia questa base ha il vantaggio di avere il reticolo dei pesi molto semplice (Fig.3). Nella base più utilizzata in fisica (quella di Gellman) la matrice metrica è  $\delta_{ij}$  e la geometria è evidente a vista; ma in compenso bisogna lavorare su un reticolo esagonale anziché quadrato.

**3.12.1. La base di Gellmann.** È sufficiente cambiare la base del sottogruppo di Cartan da  $(H_1, H_2)$  a  $(\lambda_3, \lambda_8)$  per svelare in tutta la sua evidenza la simmetria dello spazio delle radici: la

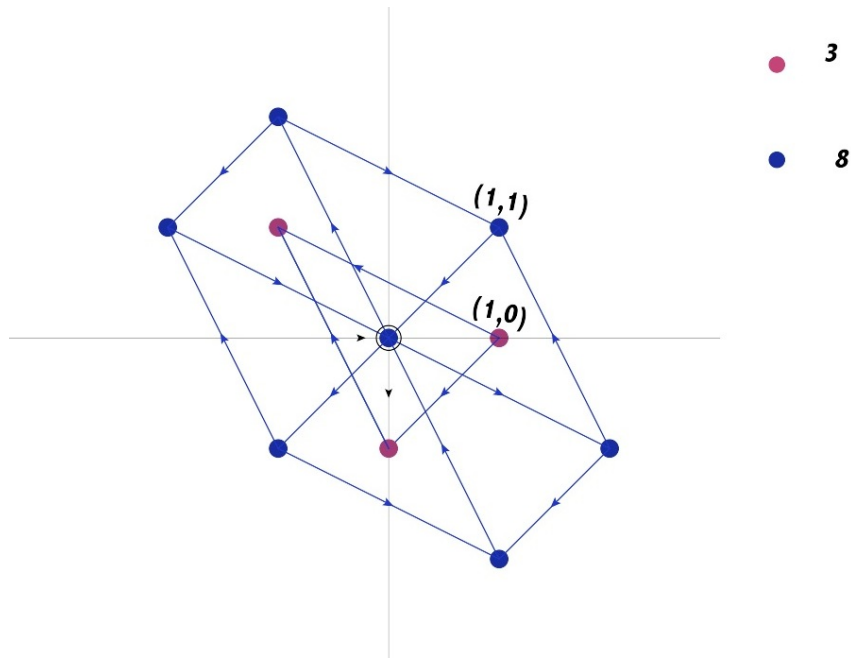


FIGURA 4. Riflessioni di Weyl

metrica è quella del piano euclideo e le riflessioni di Weyl sono evidenti a vista:

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che  $(\lambda_i | i = 1, 2, 3)$  formano una sottoalgebra isomorfa a  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\lambda_8$  commuta con quest'ultima in quanto è multipla dell'identità nel sottospazio 1 - 2. I generatori di  $\mathfrak{su}(3)$  sono convenzionalmente  $T_\alpha = \frac{1}{2}\lambda_\alpha$ .

Guardiamo le matrici  $T_\alpha$  nella rappresentazione aggiunta. Il calcolo è semplice ma ovviamente ci sono da calcolare decine di commutatori; il risultato è

$$\begin{aligned}
\text{ad}_{T_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{T_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{ad}_{T_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{T_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{ad}_{T_5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{T_6} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{ad}_{T_7} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{ad}_{T_8} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le radici dell'algebra si trovano da questa rappresentazione diagonalizzando un generico elemento della sottoalgebra di Cartan  $\mathfrak{a}_3 T_3 + \mathfrak{a}_8 T_8$ . Il compito è ovviamente facilitato utilizzando invece del tradizionale foglio di carta e matita un foglio di Mathematica. Si trovano gli autovalori

$$\begin{cases} 0 & \text{doppio - sono gli elementi della sottoalgebra di Cartan} \\ \pm \mathfrak{a}_3 & \text{autovalore } \pm 1 \text{ di } T_3 \text{ e } 0 \text{ di } T_8 \\ \pm(\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{a}_8) & \text{autovalori } \pm 1/2 \text{ di } T_3 \text{ e } \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ di } T_8 \end{cases}$$

che sono come aspettato funzionali lineari sulla sottoalgebra di Cartan. In questa base le radici sono allora rappresentate dai vertici di un esagono regolare. La metrica è quella del piano euclideo come si può verificare calcolando la forma di Killing ( $\text{Tr}[\text{ad}_{T_i} \text{ad}_{T_j}] = -\frac{1}{2}\delta_{ij}$ ). Il segno meno sta a indicare che  $\text{ad}$  è anti-autoaggiunto.

3.12.2. *Radici positive.* Serviranno un paio di definizioni: si dicono *radici positive* quelle radici che giacciono in un semipiano (semi-iperspazio nel caso di rango superiore) scelto convenzionalmente; nel nostro caso il semipiano è definito da  $x + y\sqrt{3} > 0$ . Si dicono poi *radici semplici* quelle radici positive che non sono esprimibili come combinazione lineare di altre radici positive con coefficienti positivi. Il numero di radici semplici è pari al rango. Nel caso di  $\mathfrak{su}(3)$  le tre radici positive sono  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ .

In analogia con il momento angolare ci si riferisce agli “innalzatori” come gli operatori  $E_\alpha$  che corrispondono a radici positive ( $X_1, W_2, X_3$  nella base del cap.3.7) e agli “abbassatori” come i loro coniugati  $E_{-\alpha}$ . Dalle relazioni di commutazione

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$$

si può dedurre lo spettro degli operatori che rappresentano  $H_i$  in ogni IRREP.

Nel diagramma sono indicate le radici ed è identificata la zona “rossa” che delimita i vettori che hanno proiezione positiva sulle due radici semplici  $\alpha_1 = (1, 0)$  e  $\alpha_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ .

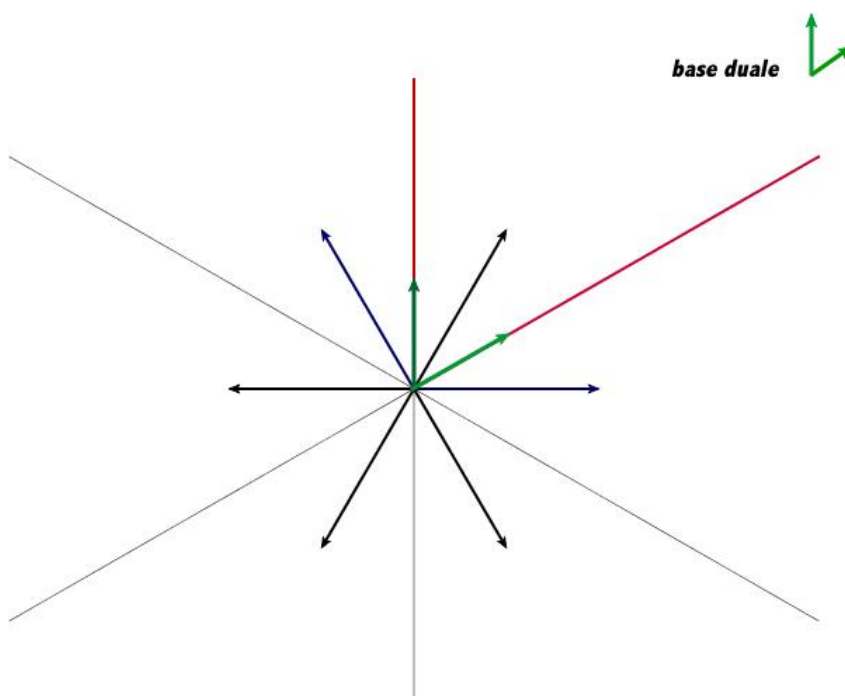


FIGURA 5. Radici di  $\mathfrak{su}(3)$

Le riflessioni di Weyl si identificano facilmente: sono le riflessioni nel piano che lasciano fisse le tre rette che dividono simmetricamente le radici.

La base duale è data da

$$t_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad t_2 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

sono vettori ortogonali alle radici semplici con indice differente. Tutto lo schema nella nuova base si ottiene da quello “sghembo” di partenza attraverso la trasformazione affine

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

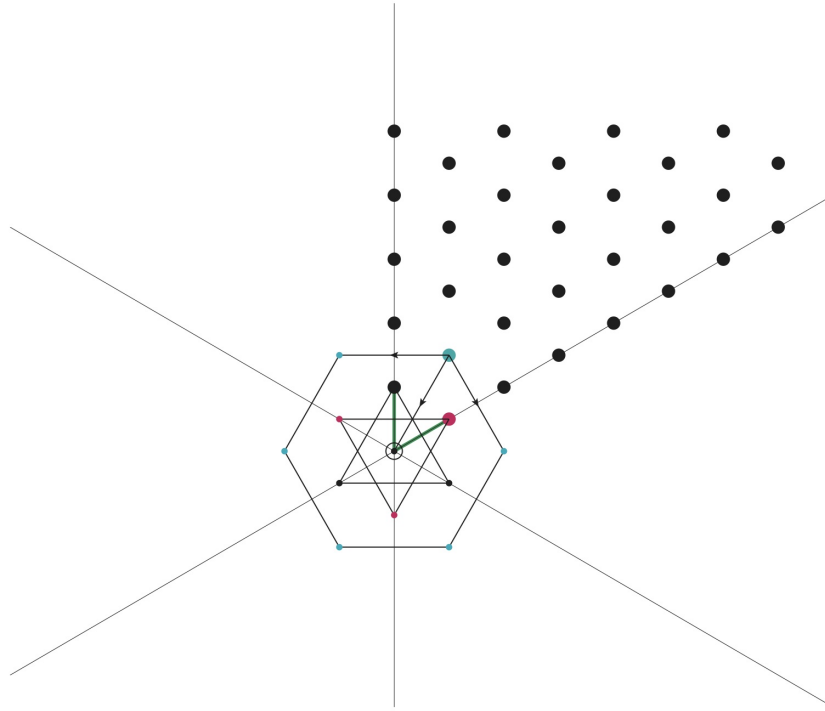


FIGURA 6. I pesi della  $\mathbf{3}$  (rosso),  $\overline{\mathbf{3}}$  (blu) e  $\mathbf{8}$  (celeste).

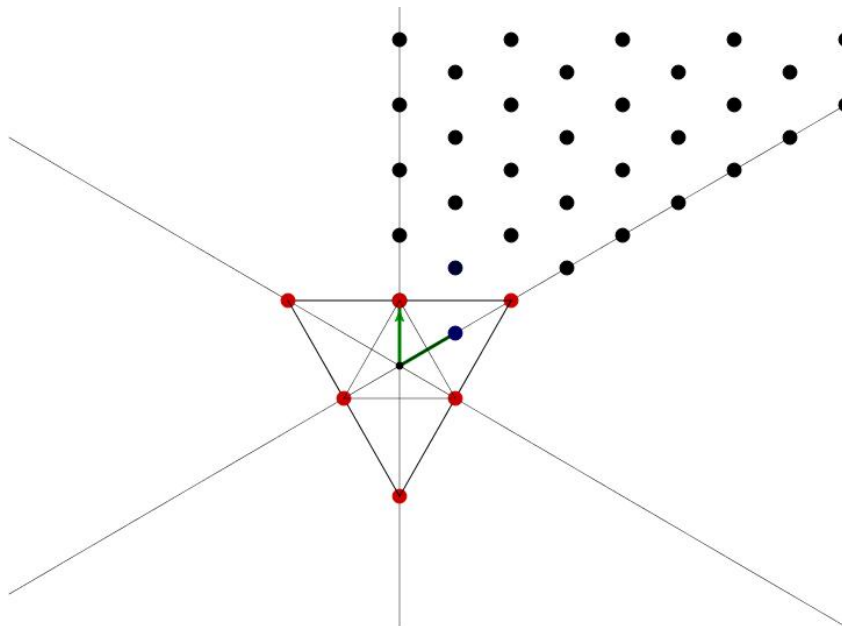


FIGURA 7. I pesi della  $\mathbf{6}$  (in rosso).

3.12.3. *Spettro degli elementi della base di Cartan.* La regola generale per costruire una rappresentazione irriducibile è la seguente: si prenda il reticolo di punti  $HW = \{n_1 t_1 + n_2 t_2 | n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+\}$ . Ad ogni scelta di  $(n_1, n_2)$  entrambi non-negativi corrisponde una IRREP e tutte le IRREP sono

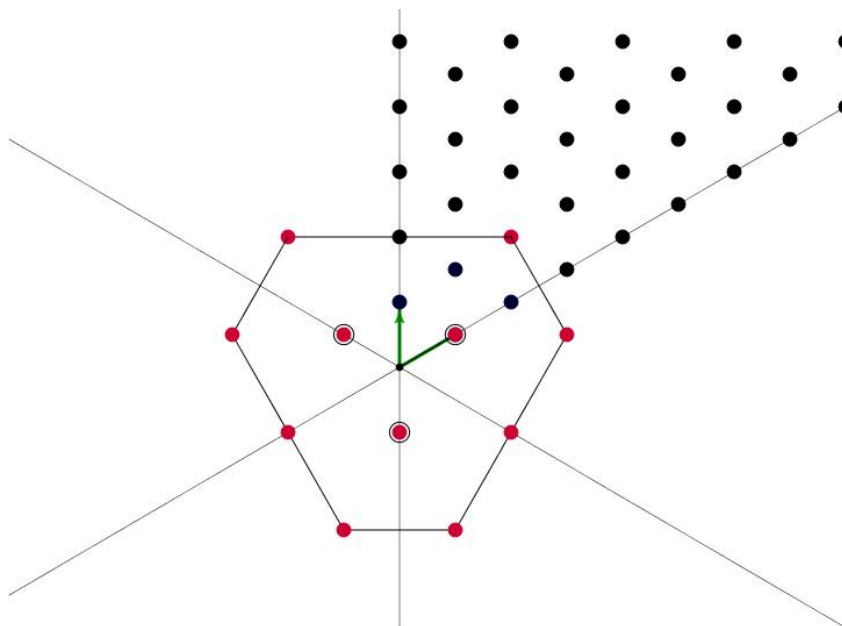


FIGURA 8. I pesi della 15.

classificate in questo modo. Il punto  $n_1 t_1 + n_2 t_2$  è detto “il peso massimale” della rappresentazione; lo stato corrispondente è annichilato dagli operatori  $E_\alpha$  corrispondenti alle radici positive (è la generalizzazione del vettore  $|j, j\rangle$  nei multipletti del momento angolare per il quale vale la relazione  $J_+ |j, j\rangle = 0$ ). Applicando le riflessioni di Weyl al peso massimale si ottengono altri pesi della rappresentazione; il valore delle componenti dei pesi rappresentano gli autovalori della base di Cartan. Per es. nella **6** (Fig. 7) gli autovalori di  $T_3$  e  $T_8$  sono

$$T_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad T_8 \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/6 & & -\sqrt{3}/6 \\ & -2\sqrt{3}/3 & \end{pmatrix}$$

A partire dal peso massimale, applicando  $E_\alpha$  con  $\alpha < 0$  si costruiscono tutti gli altri stati della IRREP tenendo conto del vincolo posto dalle riflessioni di Weyl: le immagini del peso massimale fissano i confini: ad es. nella **6** con la riflessione  $W_1$  si costruisce il peso  $(-1, 0)$  e l'applicazione di  $E_{-\alpha_1}$  si arresta quando si arriva a questo peso, cioè  $E_{-\alpha_1} |-1, 0\rangle = 0$ . La cosa funziona come per il momento angolare: la riflessione di Weyl produce  $W_1 |j, j\rangle = |j, -j\rangle$  e di conseguenza  $J_- |j, -j\rangle = 0$ . Lo spettro di  $T_3$  e  $T_8$  si ricostruisce a partire dal diagramma dei pesi così determinato. Notare che la denominazione “peso massimale” non significa che gli autovalori siano “massimi” in termini numerici: il termine sta a indicare che lo stato corrispondente al peso massimale è annichilato dagli operatori di innalzamento, cioè gli  $E_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Ad es. in Fig. 8 si verifica come l'autovalore 1 di  $T_3$  relativo al peso massimale *non* è il valore più grande; infatti  $E_{-2}$  (radice negativa) *aumenta* l'autovalore.

L'insieme dei pesi a partire da quello massimale è facilmente individuato anche considerando le sottoalgebre  $\mathfrak{su}(2)$  generate da  $(X_\alpha, X_{-\alpha})$  per ogni radice positiva  $\alpha$ . Il peso  $|m_1, m_2\rangle$  corrisponde ad autovalori  $(\frac{1}{2}m_1, \frac{1}{2}m_2)$  degli elementi  $H_\alpha$  delle due radici primitive. Questo si verifica facilmente tenendo conto della definizione della base duale  $(t_1, t_2)$  e della trasformazione che lega  $H_1$  e  $H_2$  alla base di Gellmann (vedi pag. 46).



Ne segue che a partire da  $|m_1, m_2\rangle$  si costruisce un multipletto di spin  $\frac{1}{2}m_1$  per la sottoalgebra corrispondente a  $\alpha = (1, 0)$  e un multipletto di spin  $\frac{1}{2}m_2$  per la sottoalgebra corrispondente a  $\alpha = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$  come mostrato in Fig. 9.

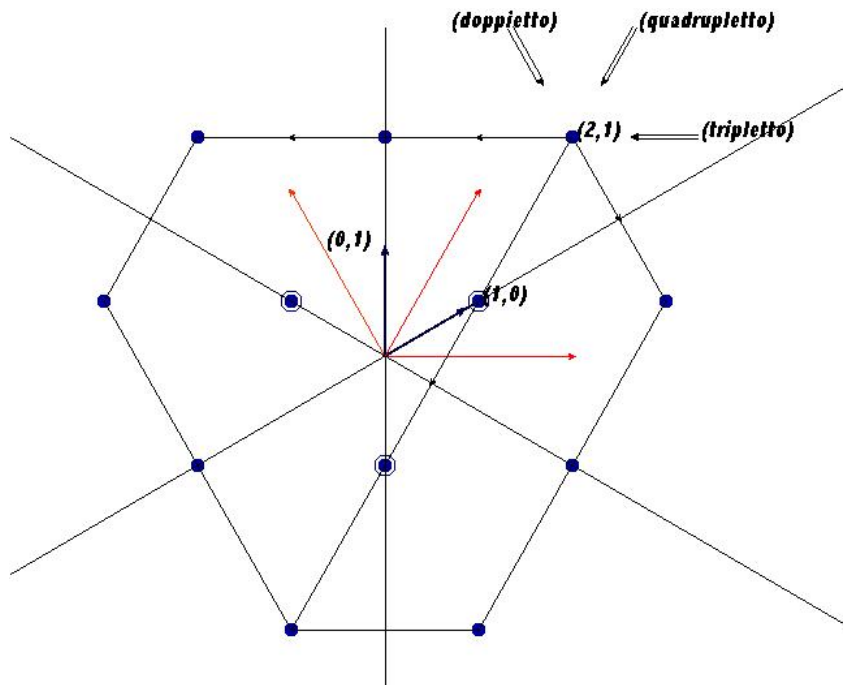


FIGURA 9. La costruzione dei pesi per  $(m_1, m_2) = (2, 1)$ .

Se consideriamo la radice positiva  $\alpha_1 + \alpha_2$ , l'autovalore dell'elemento dell'algebra di Cartan corrispondente è la somma  $m_1 + m_2$  e quindi dal peso massimale si genera un multipletto di spin  $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ . Si noti in figura come le simmetrie di Weyl siano rispettate automaticamente.

3.12.4. *Ancora l'oscillatore armonico in 3D.* Possiamo ora analizzare più dettagliatamente le rappresentazioni che entrano nello spettro dell'oscillatore armonico isotropo quantistico a tre gradi di libertà. Dalle relazioni (51) si vede che  $X_1$  aumenta  $n_1$  e diminuisce  $n_2$  di una unità, e analogamente per gli altri generatori; se ne conclude che i generatori dell'algebra di  $\mathfrak{su}(3)$  sono realizzati nello spazio di Hilbert come segue:

$$\begin{aligned}
 H_1 &\rightarrow a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \\
 H_2 &\rightarrow a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3 \\
 X_1 &\rightarrow a_1^\dagger a_2 \\
 X_2 &\rightarrow a_2^\dagger a_3 \\
 X_3 &\rightarrow a_1^\dagger a_3 = [X_1, X_2] \\
 Y_i &= X_i^\dagger
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

dove gli operatori  $a_i$  sono i soliti operatori di annichilazione. È ovvio che tutti i generatori dell'algebra commutano con l'Hamiltoniana  $H = \sum a_i^\dagger a_i$ . Gli stati  $|m, 0, 0\rangle$  corrispondono a pesi

massimali, infatti sono annichilati da  $X_1$  e  $X_2$ . Il semplice fatto che si ha anche  $Y_2 |m, 0, 0\rangle = 0$  mostra che nella direzione della radice  $\alpha_2$  si ha un singoletto di  $\mathfrak{su}(2)$  e pertanto i diagrammi dei pesi sono dei triangoli equilateri con lato lungo  $m$  (vedi Fig. 10). Le rappresentazioni con peso massimale  $(m_1, m_2)$  con  $m_2 \neq 0$  non entrano nello spettro.

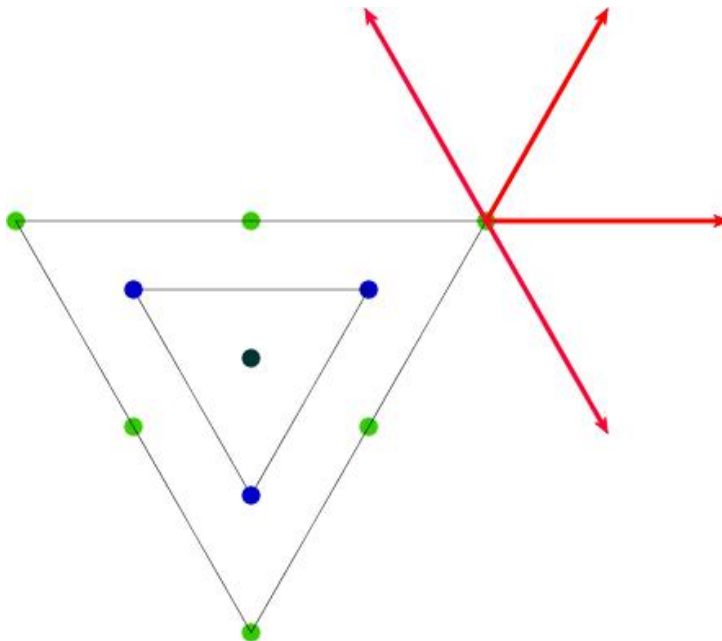


FIGURA 10. I pesi corrispondenti allo spettro dell'oscillatore isotropo 3D.

3.12.5. *La formula di Weyl per la dimensione.* La dimensione delle rappresentazioni irriducibili è data da una formula generale dovuta a H. Weyl. Sia  $\mu$  il peso massimo della rappresentazione  $\mathcal{D}_\mu$ , allora

$$(60) \quad \dim(\mathcal{D}_\mu) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \mu + \rho | \alpha \rangle}{\langle \rho | \alpha \rangle}$$

essendo  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$  (la semisomma delle radici positive). Per  $\mathfrak{su}(3)$  il peso massimo è individuato da due numeri  $m_1, m_2$  con  $\mu = m_1 t_1 + m_2 t_2$ , essendo  $t_i$  i vettori della base duale. Per applicare la formula di Weyl conviene avere a disposizione i prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \langle t_i | \alpha_j \rangle &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \\ \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui (ovviamente  $\rho = \alpha_3$ )

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{D}_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}) &= \prod_{i=1}^3 \frac{\langle \mathbf{m}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{t}_2 + \alpha_3 | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_3 | \alpha_i \rangle} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{2} \mathbf{m}_2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + 1}{1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 + 1)(\mathbf{m}_2 + 1)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 2) \end{aligned}$$

Notare che i due numeri non negativi  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  coincidono con la lunghezza dei due lati dell'esagono che racchiude i pesi della rappresentazione e che hanno il peso massimale come vertice comune e direzione  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  (le radici semplici). Ad es. l'esagono regolare della **8** corrisponde a (1,1); la **15** di Fig.8 ha (2,1) e infatti

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 5 = 15 .$$

mentre la **6** ha un lato collassato a zero e quindi corrisponde a (2,0).

La formula per  $\mathfrak{su}(3)$  ha una derivazione del tutto elementare. Contiamo i nodi del diagramma dei pesi partendo dall'alto: sono  $\mathbf{m}_1 + 1$ ; nella fila appena sotto sono  $\mathbf{m}_1 + 2$  e sommando fino alla fila più lunga si ottiene

$$\frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 1)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 2) - \frac{1}{2} \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1 + 1) .$$

Partendo dal basso ne contiamo altri  $\frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + 1) - \frac{1}{2} \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_2 + 1)$ , in totale  $\frac{1}{2}(2 + 3(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + \mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2 + 4\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2)$ . Così facendo però non abbiamo tenuto conto della molteplicità dei pesi che va aumentando di uno ad ogni esagono più interno fino ad arrivare all'esagono più interno con un lato degenerare di lunghezza zero, meglio noto come triangolo. Si ha allora

$$\dim_{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} = \frac{1}{2}(2 + 3(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + \mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2 + 4\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) + \dim_{\mathbf{m}_1-1, \mathbf{m}_2-1}$$

con

$$\dim_{\mathbf{m}, 0} = \dim_{0, \mathbf{m}} = \frac{1}{2}(\mathbf{m} + 1)(\mathbf{m} + 2)$$

dato che nel caso del triangolo tutti i pesi sono semplici. Dalla relazione di ricorrenza segue poi il risultato già ottenuto con la formula di Weyl.

**3.13. Diagrammi di Young.** Un altro metodo per classificare le IRREPS è legato all'algebra tensoriale e all'impiego dei diagrammi di Young. Si veda il testo di Sternberg.

Qui basti ricordare che una rappresentazione con peso massimo  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$  è associata al diagramma di Young con due file di caselle, la prima fila contiene  $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$  caselle, la seconda  $\mathbf{m}_1$ . La dimensione è data da una frazione con:

- a) numeratore: nella casella  $i$ -esima da sinistra,  $j$ -esima dall'alto si mette il numero  $3 + i - j$  e si calcola il prodotto di tutte le caselle;
- b) denominatore: lo "hook number", ossia a ogni casella è associato il numero di caselle che si trovano a destra nella stessa fila e sotto nella stessa colonna, più uno; si calcola il prodotto di tutte le caselle (come in Eq.(31).

Prendiamo ad es. la (2, 1) che avrà un diagramma di Young 


 :

• numeratore:  $\frac{3 \ 4 \ 5}{2} = 120$

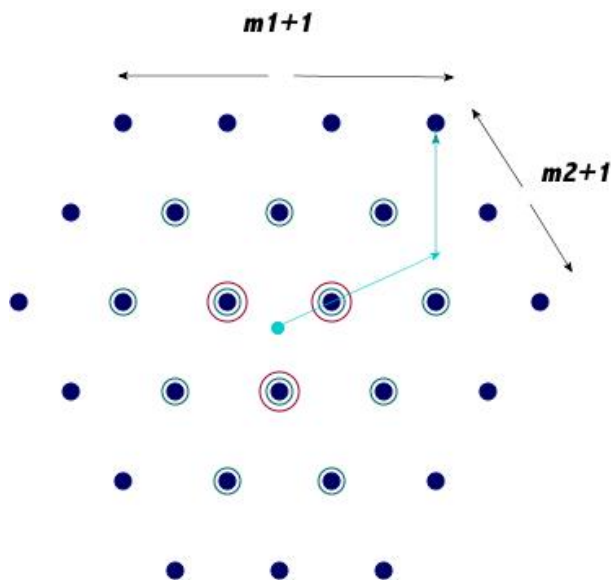


FIGURA 11. Le molteplicità dei pesi nell'esempio  $(m_1, m_2) = (3, 2)$ .

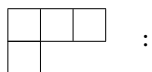
- denominatore:  $\begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 \end{matrix} = 8$

dunque **15**. In generale

- numeratore:  $\begin{matrix} 3 & 4 & 5 & \dots & m_1+2 & \dots & m_1+m_2+2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & m_1+1 \end{matrix} \rightarrow (m_1+m_2+2)!(m_1+1)!/2;$

- denominatore:  $\begin{matrix} m_1+m_2+1 & m_1+m_2 & \dots & m_2+2 & m_2 & m_2-1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_1-1 & \dots & 1 \end{matrix} \rightarrow$   
 $(m_1+m_2+1)!/(m_2+1) m_1!$

da cui segue il valore già noto dalla formula di Weyl. Si noti che la formula di Weyl e la formula basata sui diagrammi di Young si possono estendere a una algebra  $\mathfrak{su}(N)$  per  $N$  qualunque. La regola si modifica inserendo  $N$  al posto del 3 nella prima casella in alto a sinistra, ad es.



- numeratore:  $\begin{matrix} n & (n+1) & (n+2) \\ (n-1) \end{matrix} \rightarrow n(n^2-1)(n+2)$

- denominatore:  $\begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow 8$

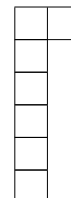
dunque  $\dim = n(n^2-1)(n+2)/8$ .

Oppure  :

- numeratore:  $\begin{matrix} n & (n+1) \\ (n-1) \end{matrix} \rightarrow n(n^2-1)$

- denominatore:  $\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow 3$

dunque  $\dim_{(2,1)} = n(n^2-1)/3$ . Infine per la rappresentazione aggiunta:



(n-1 caselle nella

prima colonna) :

- numeratore:  $\begin{matrix} n & n+1 \\ n-1 \\ n-2 \\ \dots \\ 2 \end{matrix} \rightarrow (n+1)!$

- denominatore:  $\begin{matrix} n & 1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \dots \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow n!/(n-1)$

dunque  $\dim = n^2-1$ , come dev'essere (coincide con la dimensione del gruppo).

**3.14. Prodotti diretti di IRREP's.** In Meccanica Quantistica, quando si considerano sistemi composti i cui componenti hanno spin definito, ad es. un sistema di due elettroni, è utile introdurre una base nello spazio degli stati fisici in cui sia diagonale il momento angolare totale. Il procedimento è denominato “somma di momenti angolari”. Dal punto di vista gruppale siamo in presenza di un *prodotto diretto di rappresentazioni*: stati fattorizzati  $|1, \alpha\rangle |2, \beta\rangle$  si trasformano sotto rotazioni attraverso il prodotto diretto delle matrici di trasformazione:

$$R_n(\theta) |1, \alpha\rangle |2, \beta\rangle = \mathcal{D}_{\alpha\alpha'}^{s_1} \mathcal{D}_{\beta\beta'}^{s_2} |1, \alpha'\rangle |2, \beta'\rangle$$

La rappresentazione è riducibile e la riduzione a componenti irriducibili si identifica con la somma dei momenti angolari. Ragionando in termini di algebra di Lie di  $\mathfrak{su}(2)$  si ha che i pesi della rappresentazione  $\mathcal{D}^{s_1} \mathcal{D}^{s_2}$ , diciamo  $\mathfrak{m}^i = \{-s^i, -s^i+1, \dots, s^i-1, s^i\}$ , ( $i = 1, 2$ ), si sommano in tutti i modi possibili; i pesi della rappresentazione prodotto sono cioè  $\mathfrak{m}_{ij} = \mathfrak{m}_i^1 + \mathfrak{m}_j^2$ . Un diagramma permette di capire come si riduce la rappresentazione ai suoi componenti irriducibili; in pratica si riproduce il diagramma dei pesi della prima rappresentazione centrandolo su ogni peso della seconda:

In figura si nota la molteplicità dei pesi così ottenuti e si ottiene immediatamente la riduzione  $\mathcal{D}^i \otimes \mathcal{D}^j = \sum_{|i-j| \leq \ell \leq i+j}^{\oplus} \mathcal{D}^\ell$ .

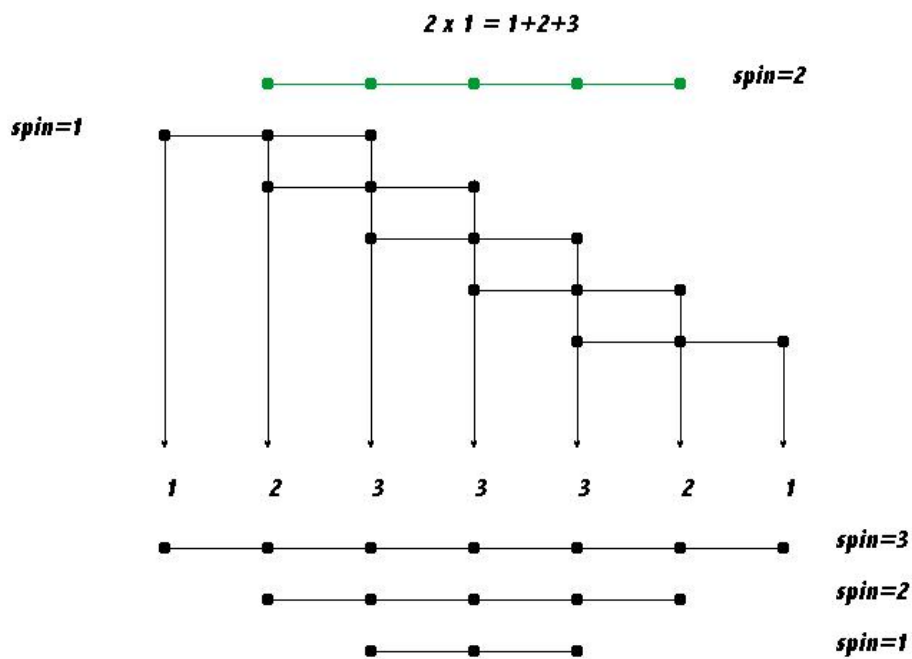


FIGURA 12. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $2 \times 1$  per  $su(2)$

Si può procedere in modo analogo nel caso di  $su(3)$ . Per un sistema formato da due particelle caratterizzate ciascuna da uno “spin” di  $su(3)$  il sistema composto si trasforma sotto  $SU(3)$  attraverso il prodotto diretto di rappresentazioni  $\mathcal{D}^{\mu_1} \otimes \mathcal{D}^{\mu_2}$ . In analogia con  $su(2)$  si colloca una copia del diagramma dei pesi della prima rappresentazione (vertici rossi) centrandola su ogni peso della seconda (vertici neri). Ad es. per due particelle appartenenti alla coniugata della rappresentazione fondamentale, la  $\bar{\mathbf{3}}$ , si trova il diagramma di Fig.13. Partendo dal peso massimo (il vertice del triangolo risultante) si costruisce la  $\bar{\mathbf{6}}$ . I tre pesi rimanenti costituiscono una  $\mathbf{3}$ . Simbolicamente  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3}$ .

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3}$$

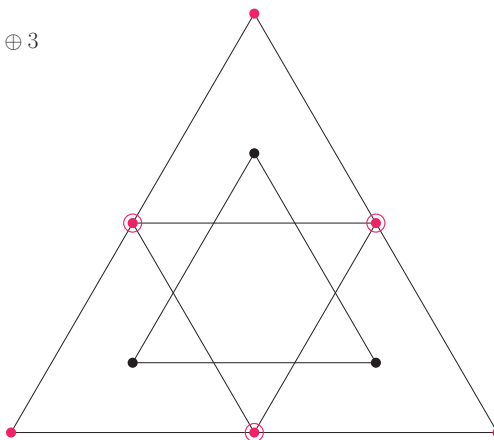


FIGURA 13. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}}$ .

Nell'esempio seguente abbiamo il prodotto  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$  che corrisponde come vedremo all'accoppiamento di un quark con un anti-quark che genera l'ottetto dei mesoni più uno scalare.

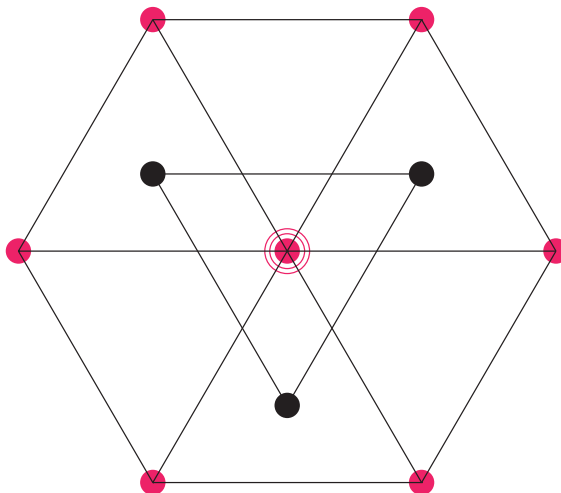


FIGURA 14. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $\bar{\mathbf{3}} \times \mathbf{3}$ .

Un calcolo un pò più complicato, il prodotto diretto  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ . Nel diagramma in Fig.15 si vede come tenere conto delle molteplicità dei pesi. Partendo dal peso più alto si sottrae la corrispondente rappresentazione e si procede ricorsivamente. Il risultato è  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ .

Si noti che nei casi  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$  e in quest'ultimo la riduzione contiene lo scalare  $\mathbf{1}$ . Questo fatto è rilevante per studiare, nel contesto delle teorie di gauge, quali combinazioni di particelle possono “adronizzare”, cioè legarsi in uno stato “senza colore”. Ad es. due quark non possono legare, mentre quark e antiquark si legano in un mesone. Un altro caso importante riguarda la combinazione di tre quarks  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ . L'analisi mostra che la riduzione contiene lo scalare, quindi si può avere uno stato senza colore di tre quarks - i barioni, come vedremo nel capitolo seguente.

Sappiamo che  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ , perciò dobbiamo calcolare  $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$  mentre sappiamo già  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ .

Dal diagramma in Fig.16 vediamo che  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$ . In totale perciò  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$

La riduzione di prodotti diretti di rappresentazioni è nota come “serie di Clebsh–Gordan” è importante in molti contesti (teoria del nucleo, modello a quark, teorie di gauge). Risulta evidente che il metodo grafico che abbiamo delineato non è adeguato per il caso di rango maggiore di due (provate a organizzare anche solo il prodotto  $\mathbf{15} \otimes \mathbf{4}$  per  $\text{SU}(4)$ ). Per questo sono state sviluppate tecniche basate sui diagrammi di Young che permettono di aggirare la difficoltà. Dal testo di H. Georgi [[Geo99]] si impara la seguente procedura per la riduzione del prodotto di due rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{su}(3)$  corrispondenti a due diagrammi di Young  $Y_1 \otimes Y_2$ :

- a) collocare simboli di colore rosso nella prima riga di  $Y_2$ ;
- b) collocare simboli di colore blu nella seconda riga di  $Y_2$ ;

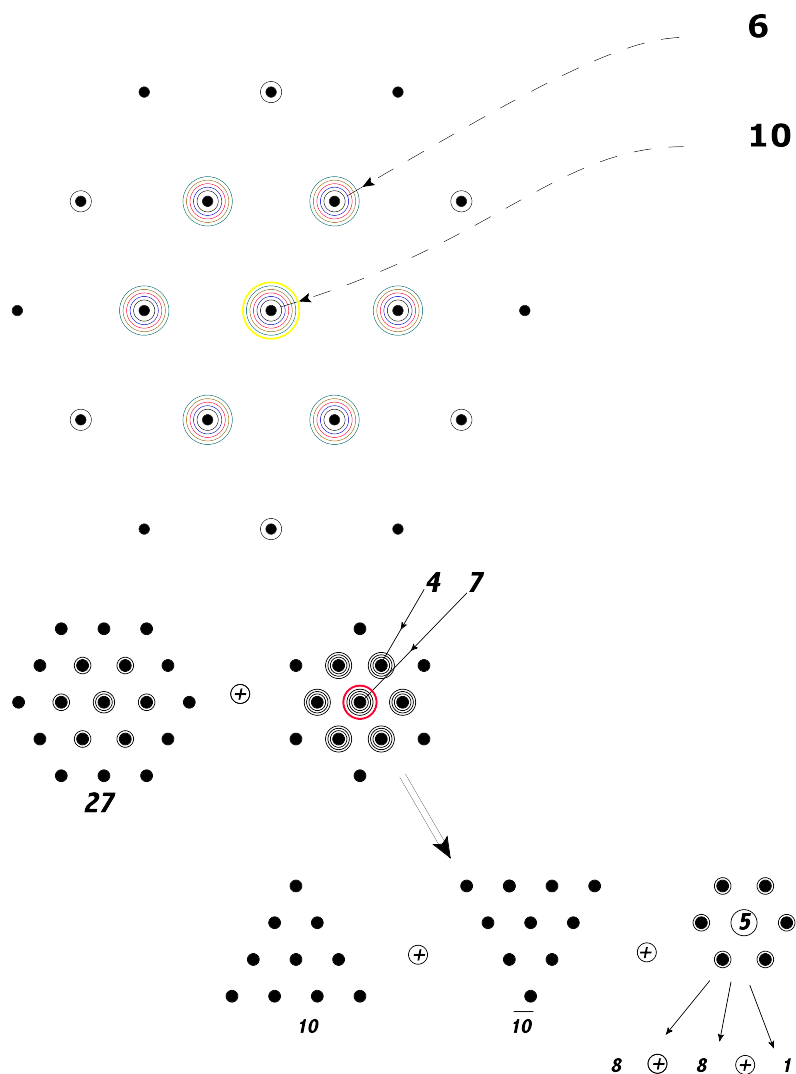


FIGURA 15. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $8 \times 8$ .

- c) spostare i simboli rossi sul diagramma  $Y_1$  rispettando il vincolo che il numero di celle di una riga sia sempre minore o uguale a quello della riga superiore, e il numero di celle in una colonna sia sempre minore o uguale a quello della colonna adiacente a sinistra; inoltre non devono essere presenti simboli rossi nella stessa colonna.
- d) spostare ora i simboli blu sul diagramma  $Y_2$  rispettando le regole precedenti e in più rispettando la seguente:
- e) percorrendo il diagramma risultante da destra a sinistra e dall'alto in basso il numero di simboli blu deve essere sempre inferiore o uguale a quello dei simboli rossi.

Un primo esempio:  $\bar{3} \otimes \bar{3}$ , vedi Fig.17.

I diagrammi cancellati non rispettano la regola (e), tranne l'ultimo che contiene quattro celle e quindi è nullo per  $\mathfrak{su}(3)$ . Un esempio più complesso  $8 \otimes 8$ , vedi Fig.18.



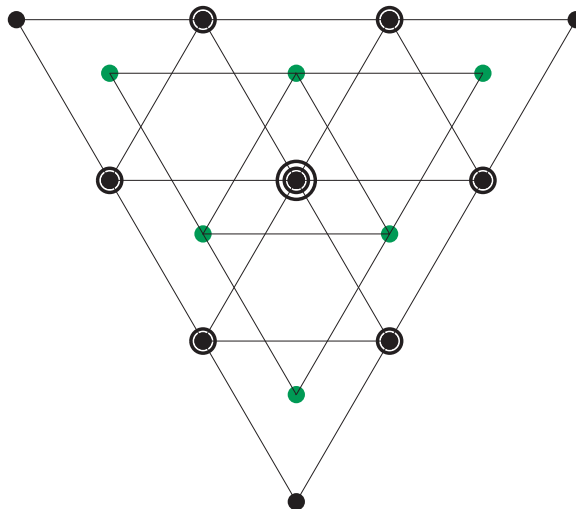


FIGURA 16. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $\mathbf{6} \times \mathbf{3}$ .

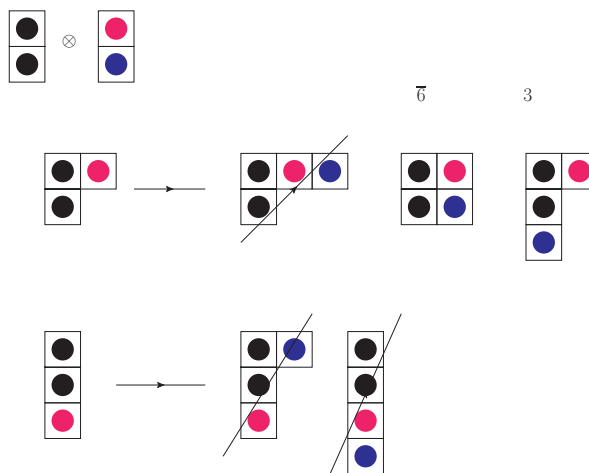


FIGURA 17. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $\bar{\mathbf{3}} \times \bar{\mathbf{3}}$ .

L'esempio più semplice  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ , che corrisponde al sistema  $q \bar{q}$ , vedi Fig.19.

La tecnica si può applicare a  $\mathfrak{su}(N)$  come mostra il prossimo esempio per  $N = 4$ , che ci dà  $\bar{\mathbf{4}} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{1}$ , vedi Fig.20.

3.14.1. *L'algoritmo di Racah-Speiser.* Se osserviamo lo schema di Fig.21 che rappresenta i pesi delle rappresentazioni che entrano nel prodotto diretto  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  si osserva che i pesi massimali (in rosso) sono ottenuti da tutti i pesi della  $\mathbf{8}$  aggiungendo il peso massimale  $(1,1)$ , tuttavia ci sono pesi mancanti, quelli che starebbero in  $(2, -1)$  e  $(-1, 2)$ . Si è tentati di concludere che i pesi massimali della decomposizione del prodotto diretto  $\mathcal{D}_\lambda \otimes \mathcal{D}_{\lambda'}$  sono dati dai pesi  $\{\lambda' + \Lambda\}$  che giacciono nel settore dei pesi positivi; questo infatti si verifica nel caso presente. Tuttavia l'ipotesi non è corretta.

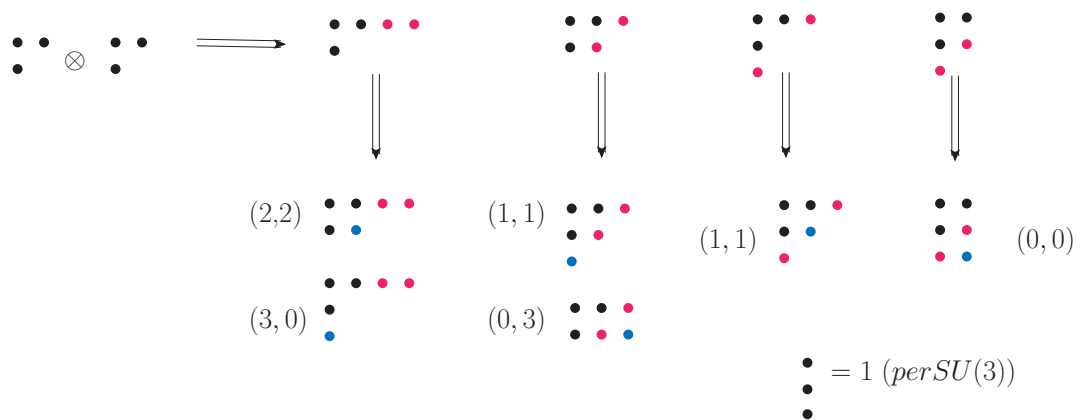


FIGURA 18. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $8 \times 8$ .

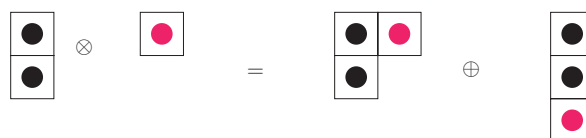


FIGURA 19. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $3 \times \bar{3}$ .

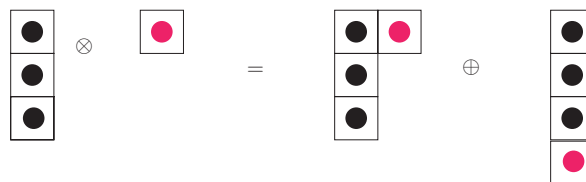


FIGURA 20. Il calcolo della riduzione del prodotto diretto  $\bar{4} \times 4$  per  $\mathfrak{su}(4)$

La formula giusta è stata trovata da Weyl, mentre Racah e Speiser l’hanno implementata in un algoritmo di facile utilizzo. Indichiamo con  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  i due pesi massimali delle due rappresentazioni e diciamo che la decomposizione sia data simbolicamente da

$$\mathcal{D}_\Lambda \otimes \mathcal{D}_{\Lambda'} = \sum_{\Lambda''} \nu_{\Lambda, \Lambda'}^{\Lambda''} \mathcal{D}_{\Lambda''}$$

dove  $\nu_{\Lambda, \Lambda'}^{\Lambda''}$  sono interi che danno la molteplicità della rappresentazione di peso massimale  $\Lambda''$  nel prodotto diretto  $\mathcal{D}_\Lambda \otimes \mathcal{D}_{\Lambda'}$ . Sia inoltre  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$  (la semisomma delle radici positive). La formula di Weyl *et al.* si enuncia così \*\*

$$\nu_{\Lambda, \Lambda'}^{\Lambda''} = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) \text{mult}_{\Lambda'}(w(\Lambda'' + \rho) - \rho - \Lambda)$$

dove  $W$  è il gruppo di Weyl,  $\text{sgn}$  è il determinante dell’elemento  $w \in W$  che porta  $\Lambda'' + \rho$  all’interno del settore dei pesi dominanti, e  $\text{mult}$  è la molteplicità del peso. Se  $\Lambda'' + \rho$  appartiene a uno degli iperpiani ortogonali alle radici positive non esiste un elemento con questa proprietà

\*\*Si veda per la dimostrazione J.Fuchs and C. Schweigert [[FS97]]

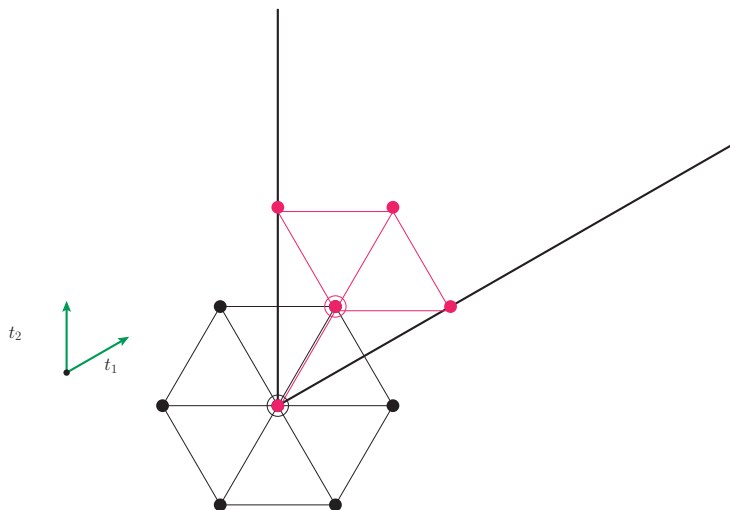


FIGURA 21. I pesi massimali nella riduzione del prodotto diretto  $8 \times 8$ .

e il corrispondente coefficiente è nullo. Questa è la formula universale che permette di calcolare la serie di Clebsh–Gordan; data la sua sorprendente semplicità è stata anche implementata in un algoritmo automatico. Vediamo il caso  $8 \otimes 8$ . In Fig.22

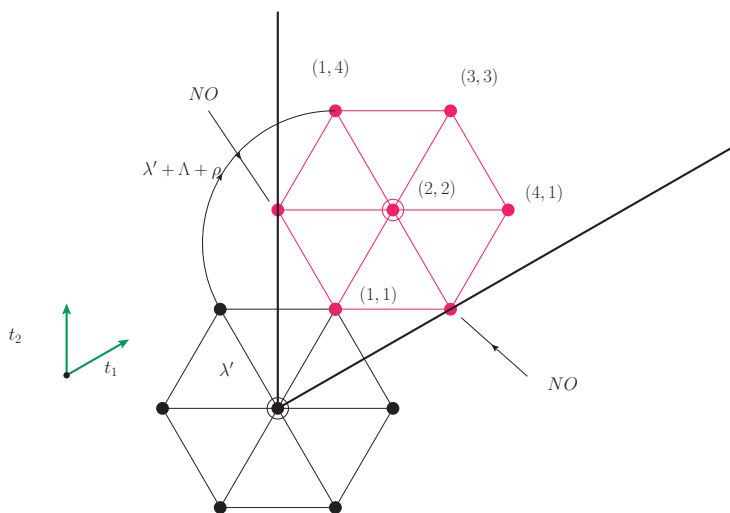


FIGURA 22. I pesi massimali nella riduzione del prodotto diretto  $8 \times 8$ .

i pesi colorati in rosso corrispondono a  $\lambda' + \Lambda + \rho$ . I due “pesi mancanti” giacciono appunto su rette ortogonali rispettivamente alle radici  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . A differenza di altri metodi che dipendono dalla rappresentazione grafica dei diagrammi dei pesi, questo metodo è interamente algebrizzabile.

Nell'esempio precedente possiamo procedere così:

$$\Lambda = \Lambda' = (1, 1) \quad , \quad \rho = (1, 1)$$

$$\lambda' \in \mathcal{D}_{\Lambda'} = \begin{pmatrix} (1, 1) \\ (-1, 2) \\ 2 \times (0, 0) \\ (-2, 1) \\ (-1, -1) \\ (2, -1) \\ (1, -2) \end{pmatrix}$$

$$\lambda' + \Lambda + \rho = \begin{pmatrix} (3, 3) \\ (1, 4) \\ 2 \times (2, 2) \\ \cancel{(0, 3)} \\ (1, 1) \\ (4, 1) \\ \cancel{(3, 0)} \end{pmatrix}$$

I pesi  $(3, 0)$  e  $(0, 3)$  giacciono sulla retta ortogonale a una radice e quindi sono eliminati mentre gli altri pesi hanno coordinate strettamente positive. Sottraendo  $\rho$  si ottiene

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \equiv (1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) \oplus (0, 3) \oplus (3, 0) \oplus 2 \times (1, 1) \oplus (0, 0)$$

Ora vediamo un esempio dove la formula corretta è indispensabile (entra in azione la somma sul gruppo di Weyl):  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{6}$ .

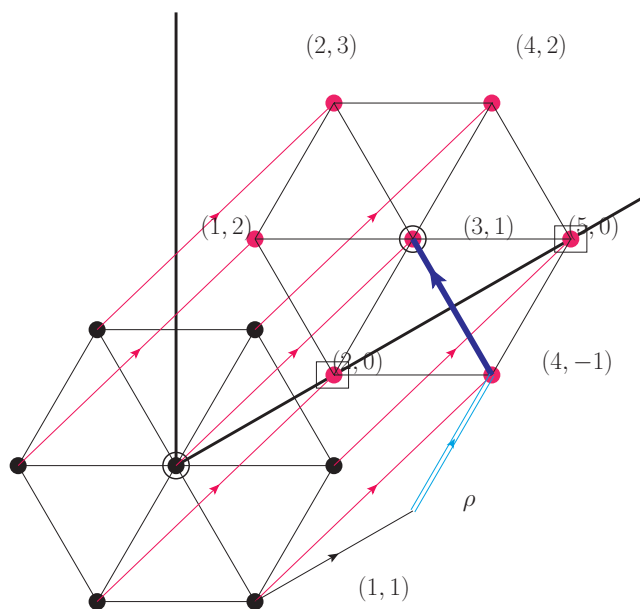


FIGURA 23. I pesi massimali nella riduzione del prodotto diretto  $\mathbf{8} \times \mathbf{6}$ .

I pesi incasellati in quadratini giacciono sulla semiretta ortogonale alla radice  $\alpha_2$  e sono quindi da scartare, mentre la  $(4, -1)$  viene inviata all'interno del settore dei pesi dominanti da una

riflessione e acquista un coefficiente  $-1$  cancellando così uno dei pesi in  $(3,1)$ . Il risultato è perciò

$$8 \otimes 6 = (3,1) \oplus (1,2) \oplus (2,0) \oplus (0,1) = 24 \oplus \overline{15} \oplus 6 \oplus \overline{3}.$$

Notiamo che se scambiamo le due rappresentazioni il calcolo è ancora più semplice, come mostrato in Fig. 24.

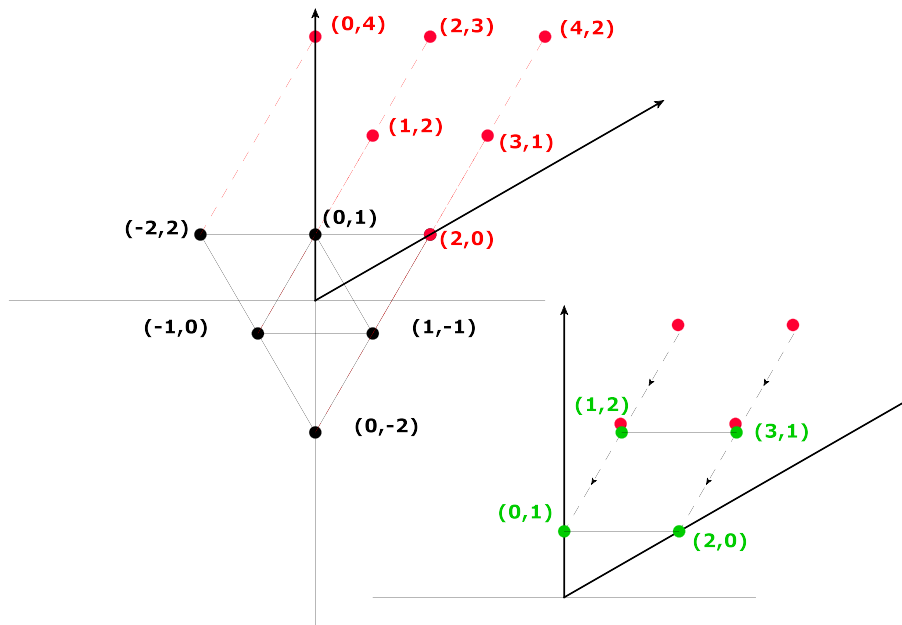


FIGURA 24. I pesi massimali nella riduzione del prodotto diretto  $6 \times 8$ .

Questo esempio mostra che conviene utilizzare il peso massimale più alto per traslare i pesi dell'altra rappresentazione.

3.14.2. *Appendice:La matrice metrica per  $\mathfrak{su}(N)$* . L'inverso della matrice  $K$  per  $\mathfrak{su}(N)$  si può impostare nel modo seguente. Posto che  $K$  soddisfa la proprietà "iperbolica", ossia  $K_{i-1,j} + K_{i+1,j} = K_{i,j-1} + K_{i,j+1}$ , segue che anche la sua inversa gode della stessa proprietà. Quindi è sufficiente calcolare la prima riga della matrice inversa, e il resto si calcola applicando la relazione di ricorrenza. Si deve perciò avere

$$(K^{-1})_{1,j} K_{j,i} = \delta_{1,i}$$

Ponendo  $(K^{-1})_{1,j} \equiv x_j$ , l'equazione ci dà

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ &\dots \dots \\ -x_{\ell-2} + 2x_{\ell-1} - x_\ell &= 0 \\ -x_{\ell-1} + 2x_\ell &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione è quindi  $x_j = \alpha j + \beta$  con le condizioni al contorno  $2(\alpha + \beta) - (2\alpha + \beta) = 1$ ,  $2(\ell\alpha + \beta) - ((\ell - 1)\alpha + \beta) = 0$  che dà subito  $\beta = 1$ ,  $\alpha = -1/(\ell + 1)$ . In definitiva la matrice inversa per rango  $\ell$  si presenta così:

$$K_\ell^{-1} = (\ell + 1)^{-1} \begin{pmatrix} \ell & \ell - 1 & \ell - 2 & \ell - 3 & \ell - 4 & \dots \\ \ell - 1 & 2(\ell - 1) & 2(\ell - 2) & 2(\ell - 3) & 2(\ell - 4) & \dots \\ \ell - 2 & 2(\ell - 2) & 3(\ell - 2) & 3(\ell - 3) & 3(\ell - 4) & \dots \\ \ell - 3 & 2(\ell - 3) & 3(\ell - 3) & 4(\ell - 3) & 4(\ell - 4) & \dots \\ \ell - 4 & 2(\ell - 4) & 3(\ell - 4) & 4(\ell - 4) & 5(\ell - 4) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ad es. per  $\ell = 3$  ossia  $\mathfrak{su}(4)$

$$K_3^{-1} = 1/4 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e per  $\mathfrak{su}5$

$$K_4^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La formula generale è:

$$(K_\ell^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{i(\ell - j + 1)}{\ell + 1} & (i \leq j) \\ \frac{j(\ell - i + 1)}{\ell + 1} & (i > j) \end{cases}$$

Si controlli su [FS97], pag.117. Per capire meglio il risultato si tenga presente che la matrice  $K$  è l'analogo discreto dell'operatore differenziale  $D_2 = -d^2/dx^2$  nell'intervallo  $(0, L)$ , il cui operatore inverso è dato, come si può facilmente verificare derivando due volte, dall'operatore integrale

$$\begin{aligned} D_2^{-1} \rho(x) &= \int_0^L x_{<} (L - x_{>}) \rho(x') dx' \\ &= \int_0^x x' (L - x) \rho(x') dx' + \int_x^L x (L - x') \rho(x') dx' \end{aligned}$$

dove  $x_{<} = \min(x, x')$ ,  $x_{>} = \max(x, x')$ , il che mostra la stretta analogia con la formula della matrice inversa  $(K_\ell^{-1})_{ij}$  (cfr. [Ono09], pag. 14).

4. EIGHTFOLD WAY

La simmetria SU(3) fu introdotta nei primi anni '60 (Gell-Mann, Ne'eman, Okubo, 1964) e si affermò come simmetria approssimata delle interazioni forti, permettendo di classificare le particelle note, prevederne di nuove ( $\Omega^-$ ) e dare una stima accurata delle differenze di massa (rottura di SU(3)) e dei modi di decadimento<sup>††</sup>.

4.1.  $\mathfrak{su}(3)$  . Il modello assegna alla rappresentazione fondamentale di SU(3) i quarks u, d, s secondo lo schema:

TABELLA 4. Numeri quantici dei quarks

	$t_3$	Y	S	Q	B
u	1/2	1/3	0	2/3	1/3
d	-1/2	1/3	0	-1/3	1/3
s	0	-2/3	-1	-1/3	1/3

dove i numeri quantici sono rispettivamente:

- $t_3$ : l'autovalore del generatore  $T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$  (isospin)
- Y: l'autovalore del generatore  $T_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$  normalizzato a valori razionali (per un fattore  $\sqrt{3}$ );
- S: stranezza;
- Q: carica elettrica;
- B: numero barionico.

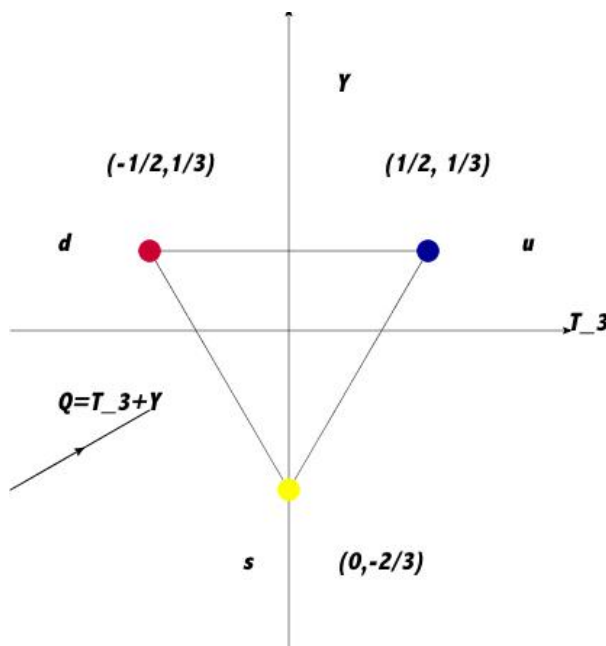


FIGURA 25. I pesi della rappresentazione fondamentale.

<sup>††</sup>La sorgente aggiornata di informazioni sul modello standard delle particelle elementari si trova su [Par94].

I numeri quantici additivi B, Q ed S sono legati ai pesi di SU(3) dalle relazioni

$$(61) \quad Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \quad Y = B + S$$

I quarks si legano a formare “adroni” nella forma  $q\bar{q}$  (mesoni) e  $qqq$  (barioni); ciò si descrive in termini di SU(3) con la rappresentazione prodotto diretto  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  e  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{10}$ , rispettivamente. Per i mesoni ( $\mathbf{8}$ ) si hanno le assegnazioni di numeri quantici secondo la tabella seguente (i numeri quantici sono additivi): e le particelle si dispongono secondo il diagramma

TABELLA 5. Numeri quantici dei mesoni più leggeri (B = 0)

	$q\bar{q}$	$t_3$	Y	S	Q
$\pi^+$	$u\bar{d}$	1	0	0	1
$\pi^-$	$d\bar{u}$	-1	0	0	-1
$\pi^0$	(1)	0	0	0	0
$K^+$	$u\bar{s}$	1/2	1	1	1
$K^-$	$s\bar{u}$	-1/2	-1	-1	-1
$K^0$	$d\bar{s}$	-1/2	1	1	0
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	1/2	-1	-1	0
$\eta$	(2)	0	0	0	0

(1)  $u\bar{u} - d\bar{d}$ , (2)  $u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$

dei pesi della rappresentazione aggiunta ( $\mathbf{8}$ )

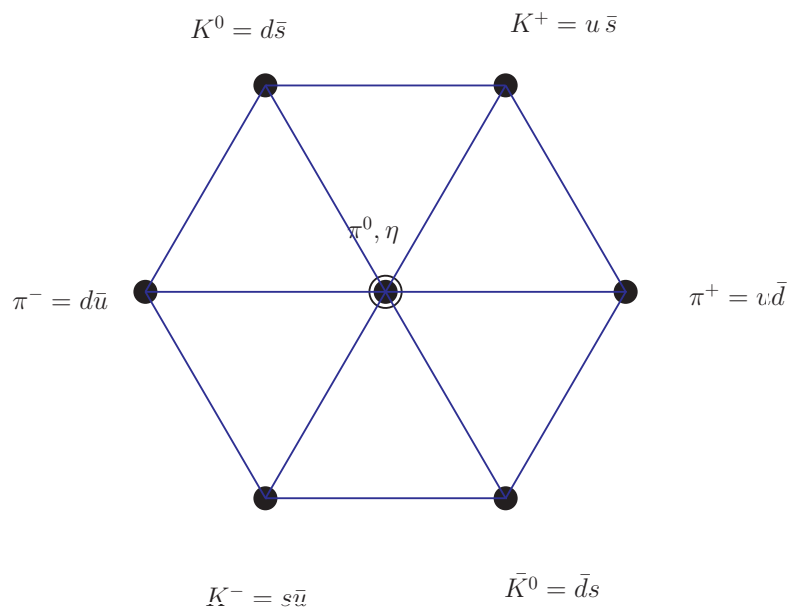


FIGURA 26. I pesi della rappresentazione aggiunta per i mesoni.

Per gli stati con tre quarks la classificazione è analoga, tenendo presente che gli stati sono individuati da combinazioni  $q_1 q_2 q_3$  con la condizione che lo stato sia simmetrico rispetto ai primi due argomenti e antisimmetrico rispetto al primo e al terzo; gli stati sono cioè classificati



dai tableaux standard di Young  $p = \begin{bmatrix} u & u \\ & d \end{bmatrix}$ ,  $n = \begin{bmatrix} u & d \\ & d \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} u & u \\ & s \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma^0 = \begin{bmatrix} u & d \\ & s \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma^- = \begin{bmatrix} d & d \\ & s \end{bmatrix}$ ,  
 $\Xi^0 = \begin{bmatrix} u & s \\ & s \end{bmatrix}$ ,  $\Xi^- = \begin{bmatrix} d & d \\ & s \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda^0 = \begin{bmatrix} d & u \\ & s \end{bmatrix}$ , con le assegnazioni di numeri quantici

TABELLA 6. Numeri quantici dei barioni più leggeri (B = 1)

	qqq	$t_3$	Y	S	Q
p	uud	1/2	1	0	1
n	udd	-1/2	1	0	0
$\Sigma^+$	uus	1	0	-1	1
$\Sigma^0$	uds	0	0	-1	0
$\Lambda^0$	dus	0	0	-1	0
$\Sigma^-$	dds	-1	0	-1	-1
$\Xi^0$	uss	1/2	-1	-2	0
$\Xi^-$	dss	-1/2	-1	-2	-1

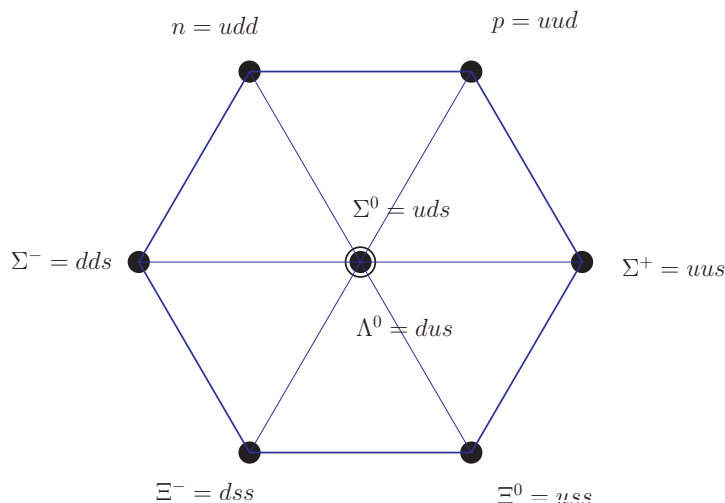
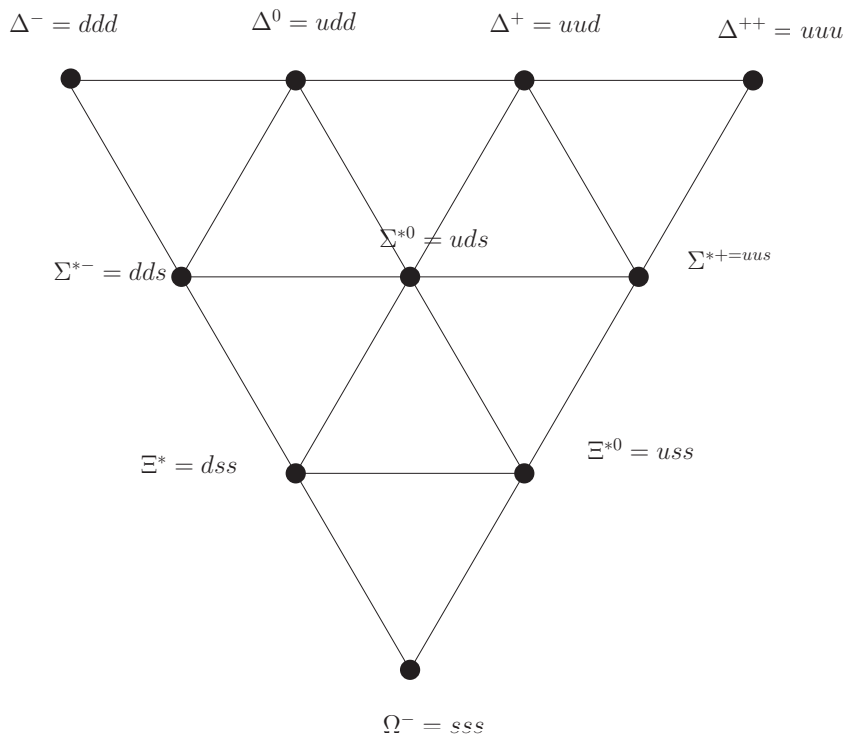


FIGURA 27. I pesi della rappresentazione aggiunta per i barioni.

Barioni più pesanti sono dati da funzioni simmetriche di  $u, d, s$  e danno origine a una rappresentazione  $\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$  di dimensione 10:

Lo stato  $\Omega^-$  è uno stato simmetrico  $sss$  dunque con  $Y = -2$  e  $S = -3$ . Questo stato dato da una funzione simmetrica di tre fermioni (spin  $3/2$ ) costituisce l'evidenza primaria della necessità di un altro grado di libertà (colore) che permetta di salvare il principio di Pauli e l'associazione spin-statistica. **Esercizio:** si costruisca la tabella dei pesi e dei numeri quantici per le particelle barioniche  $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-$ .

4.2.  $su(4)$ . Il modello di Gellmann si potrebbe in linea di principio estendere a quattro sapori includendo il charm. La simmetria di sapore sarebbe allora  $SU(4)$ . Naturalmente la grossa differenza di massa tra  $u, d, s$  con il charm rompe la simmetria in modo troppo forte per essere

FIGURA 28. I pesi della rappresentazione **10** per i barioni pesanti.

sfruttata a livello dinamico per via perturbativa. Tuttavia al semplice scopo di classificazione vediamo come si procede alla costruzione delle rappresentazioni di  $\mathfrak{su}(4)$

Procedendo come per  $\mathfrak{su}(3)$  si individuano tre matrici come base dell'algebra di Cartan

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici X e Y analoghe a quelle di Eq. (52) sono date da

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
X_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & X_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e soddisfano alle relazioni di commutazione

$$[H_i, X_j] = \alpha_i^{(j)} X_j$$

dove  $\alpha^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, 6$  rappresentano le sei radici positive di  $\mathfrak{su}(4)$ . La base dell'algebra di Lie è completata da  $Y_i = X_i^\dagger$ , in tutto 3 elementi nella sotto-algebra di Cartan e 12 elementi in corrispondenza alle 12 radici. Il calcolo delle radici è elementare, ma un pò laborioso. Si troverà un codice Mathematica su [dropbox](#) con cui si trovano le radici positive

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)} &= (2, -1, 0) \\
\alpha^{(2)} &= (-1, 2, -1) \\
\alpha^{(3)} &= (0, -1, 2) \\
\alpha^{(4)} &= (1, 1, -1) \\
\alpha^{(5)} &= (-1, 1, 1) \\
\alpha^{(6)} &= (1, 0, 1)
\end{aligned} \tag{62}$$

mentre le radici negative si ottengono per riflessione totale rispetto all'origine degli assi. In figura Fig. 4.2 si troverà una vista in 3D del sistema di radici. In questa base non è agevole ragionare su pesi e riflessioni di Weyl, per cui, come nel caso di  $\mathfrak{su}(3)$  si preferisce passare ad un'altra base che estende a  $\mathfrak{su}(4)$  la base di Gellmann. Partendo dai vettori

$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$$

che rappresentano le radici positive di  $\mathfrak{su}(3)$  immerse in  $\mathbb{R}^3$ , cerchiamo un terzo vettore che abbia lunghezza uno e prodotto scalare rispettivamente 0 e  $-1/2$  con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Si trova

$$\alpha_3 = (0, -1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3}).$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \end{pmatrix}$$

trasforma le radici nella base "naturale" (Eq. (62) in quella di Gellmann. Inoltre le sue colonne rappresentano la base duale  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  tale che  $\langle \mathbf{t}_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ . I pesi massimali sono dati, come per  $\mathfrak{su}(3)$  dalla combinazione lineare  $m_1 \mathbf{t}_1 + m_2 \mathbf{t}_2 + m_3 \mathbf{t}_3$  con  $m_i \geq 0$ .

In Fig. 4.2 sono riportate tutte le radici e i vettori della base duale. Il segmento in nero rappresenta il peso più alto della rappresentazione aggiunta, che coincide con  $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ , ossia

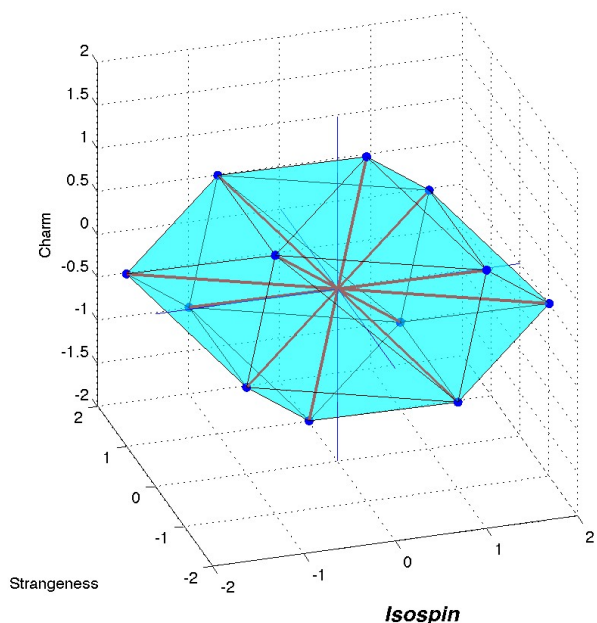


FIGURA 29. I pesi della rappresentazione fondamentale (radici) di  $su(4)$ .

$(m_1, m_2, m_3) = (1, 0, 1)$ . Con la regola illustrata in Sec.3.13 si ottiene per il diagramma di

Young che corrisponde a  $(1, 0, 1)$ :



• numeratore:  $\frac{4 \cdot 5}{2} = 120$

• denominatore:  $\frac{4 \cdot 1}{1} = 8$

ossia  $\dim = 15 (= n^2 - 1)$ .

Per conoscere le assegnazioni dei pesi di  $su(4)$  alle particelle elementari nel modello a quark, si consulti **Review of Particle Properties**, on line su

<http://pdg.lbl.gov/2010/reviews/rpp2010-rev-quark-model.pdf>.

Esercizio: ricavare le radici positive nella base di Gellmann e calcolare la formula di Weyl per la dimensione delle rappresentazioni irriducibili. Risultato:  $\mu = \sum m_i t_i$ ,

$$d_\mu = \frac{1}{12} (m_1 + 1) (m_2 + 1) (m_1 + m_2 + 2) (m_3 + 1) (m_2 + m_3 + 2) (m_1 + m_2 + m_3 + 3) .$$

4.3.  $su(N)$ . Per studiare gruppi unitari di rango più alto, di interesse ad esempio per le teorie di Grande Unificazione,†† è preferibile utilizzare i metodi basati sui diagrammi di Young. Qui vediamo solo un caso particolare ( $su5$ ) utilizzando per comodità il calcolo simbolico. Il codice si trova su [dropbox/MMA/Mathematica/SU\(N\).nb](#). Lì si troverà la costruzione della base naturale

††Si veda ad es. il testo di Georgi [[Geo99]].

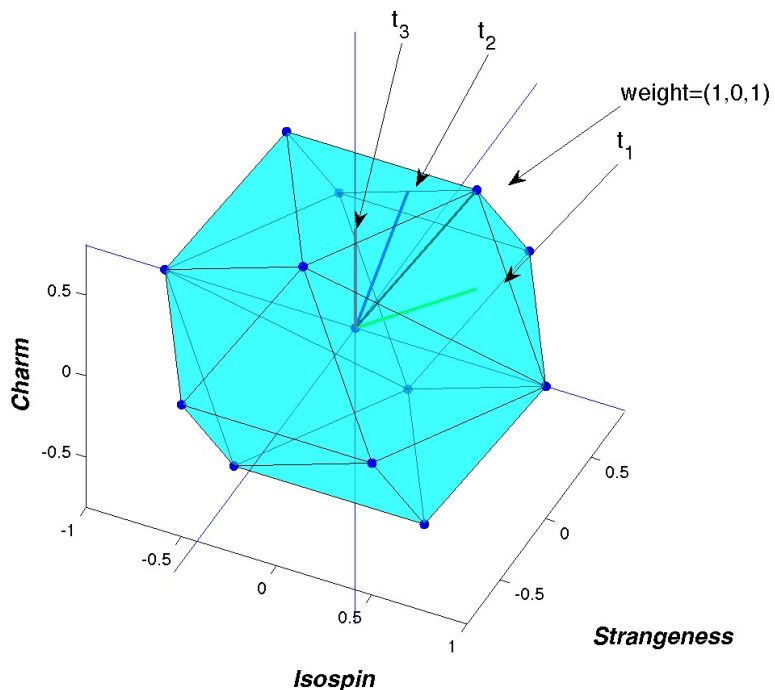


FIGURA 30. I pesi della rappresentazione fondamentale (radici) di  $su(4)$  nella base di Gellmann.

(con la metrica di Killing) e quella della base di Gellmann. Volendo evitare l'uso del calcolo simbolico, e procedere per un  $n$  generico, si può procedere così:

- Costruire le radici primitive: sono in numero pari al rango  $r = N - 1$  e sono date nella base naturale dalle righe della metrica di Killing–Cartan, cioè

$$K(A_r) = K(\mathfrak{su}_{r+1}) = \begin{cases} \alpha_1 &= ( 2, -1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ \alpha_2 &= (-1, 2, -1, 0, 0, \dots, 0) \\ \alpha_3 &= (0, -1, 2, -1, 0, \dots, 0) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{r-2} &= (0, \dots, 0, -1, 2, -1, 0) \\ \alpha_{r-1} &= (0, \dots, 0, 0, -1, 2, -1) \\ \alpha_r &= (0, \dots, 0, 0, 0, -1, 2) \end{cases}$$

- Costruire le radici di secondo livello

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1} &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_{r+2} &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{2r-1} &= \alpha_{r-1} + \alpha_r \end{aligned}$$

- Costruire le radici di terzo livello

$$\begin{aligned}\alpha_{2r} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_{2r+1} &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{3r-3} &= \alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r\end{aligned}$$

- Si procede analogamente fino a ottenere la radice di livello più elevato

$$\alpha_{r^2-1} = \sum_{k=1}^r \alpha_k .$$

Ad es. per  $\mathfrak{su}_6$  si ha

$$\begin{aligned}\alpha_6 &= \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, -1, 0, 0) \\ \alpha_7 &= \alpha_2 + \alpha_3 = (-1, 1, 1, -1, 0) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{15} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (1, 0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

- La matrice che trasforma alla base di Gellmann si ottiene poi sfruttando la matrice di Killing-Cartan. Ponendo la prima riga uguale a  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ , la seconda riga avrà due elementi  $\neq 0$ , e dovrà soddisfare alla condizione di avere prodotto scalare  $= -1/2$  con la prima riga e lunghezza  $= 1$ . Questo dà la seconda riga  $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ . Il procedimento si itera fino a costruire una matrice  $r \times r$ . Ponendo

$$A_{k-1,k} = a_k, \quad A_{k,k} = b_k$$

si trova la relazione di ricorrenza

$$a_k = -(2b_k)^{-1}, \quad b_k = \sqrt{1 - a_{k-1}^2}, \quad (k = 2, 3, \dots, r).$$

La soluzione che rispetta  $a_1 = 0, b_1 = 1$  è data da

$$a_k = -\sqrt{\frac{k-1}{2k}}, \quad b_k = \sqrt{\frac{k+1}{2k}}$$

La matrice soddisfa per costruzione la relazione  $A A^\top = K$  essendo  $K$  la matrice di Killing-Cartan e  $A^\top$  la trasposta di  $A$ .

La base di Gellmann si ottiene applicando la trasformazione  $A^{-1}$  alla base naturale delle  $\alpha_j$  costruita in precedenza. Infatti il prodotto scalare nella metrica  $\delta_{ij}$  risulta

$$\begin{aligned}\sum_i (A^{-1} \alpha^{(j)})_i (A^{-1} \alpha^{(k)})_i &= \sum A_{il}^{-1} \alpha_l^{(j)} A_{im}^{-1} \alpha_m^{(k)} \\ &= \langle \alpha^{(j)} | A^{-1\top} A^{-1} \alpha^{(k)} \rangle = K K^{-1} K = K\end{aligned}$$

## 5. SVILUPPI

**5.1. Teorema di Serre.** La base teorica per la ricetta precedente è fornita dal teorema di Serre (vedi A. W. Knaap [Kna96], S. Sternberg, "Lie Algebras", disponibile on line). Alla Prop.2.95 si afferma che esistono elementi dell'algebra  $H_i, X_i, Y_i$  con  $i = 1, \dots, r$ , ( $r$  = rango dell'algebra di Lie semisemplice), con le seguenti proprietà:

- $[H_i, H_j] = 0$  (sottoalgebra di Cartan)
- $[X_i, Y_i] = \delta_{ij} H_i$
- $[H_i, X_j] = A_{ij} X_j$ , con  $A$  = matrice di Cartan.
- $[H_i, Y_j] = -A_{ij} Y_j$

- per  $i \neq j$  si ha

$$\begin{cases} (\text{ad}_{X_i})^{1-A_{ij}}(X_j) = 0 \\ (\text{ad}_{Y_i})^{1-A_{ij}}(Y_j) = 0. \end{cases}$$

In altre parole il teorema di Serre identifica una base naturale in cui le radici semplici sono date dalle righe della matrice di Cartan, come abbiamo trovato per  $\mathfrak{su}(N)$

5.2. **L'algebra  $\mathfrak{so}(5) \equiv \mathfrak{sp}(2)$ .** Esaminiamo ora un'algebra di Lie semisemplice caratterizzata da radici di diversa lunghezza, il che permette di chiarire il ruolo della metrica di Killing e della matrice di Cartan. L'algebra  $\mathfrak{so}(5)$  è l'algebra di Lie del gruppo  $\text{SO}(5)$  delle rotazioni in cinque dimensioni. Ha dimensione 10 ( $\text{SO}(n) \rightarrow n(n-1)/2$ ) e rango due. Nella rappresentazione naturale di dimensione cinque gli elementi di  $\mathfrak{so}(5)$  sono individuati da matrici  $5 \times 5$  reali antisimmetriche. Si individua facilmente una sottoalgebra di Cartan  $H_1$  e  $H_2$  che generano rotazioni nei piani 1-2 e 3-4, tra loro ovviamente commutanti. Si trova poi facilmente il sistema di radici (vedi il programma `so5roots.nb`). Una scelta di radici semplicie data da

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e le altre radici positive sono rappresentate da  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , mentre le rimanenti sono  $\alpha_{i+4} = -\alpha_i$ . La metrica di Killing ristretta all'algebra di Cartan è

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e la matrice di Cartan risulta essere

$$[A_{ij}] = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il diagramma delle radici è data in Fig. 5.2. Il significato della asimmetria della matrice di Cartan è il seguente:  $A_{12} = -1$  significa che  $\alpha_1 + k\alpha_2$  è una radice solo per  $k \leq 1$ , mentre  $\alpha_2 + k\alpha_1$  è una radice per  $k \leq 2$ . Notiamo che il gruppo  $\text{SO}(5)$  sarebbe il gruppo di simmetria per l'atomo di idrogeno in quattro dimensioni, come  $\text{SO}(4)$  lo è per il caso fisico tridimensionale. La cosa non è ovviamente di grande interesse fisico. Tuttavia i gruppi ortogonali  $\text{SO}(n)$  sono di interesse in teoria di stringa. Un'altra curiosità è data dall'isomorfismo  $\text{SO}(5) \sim \text{Sp}(2)$  con il gruppo simplettico, formato dalle matrici  $4 \times 4$  come descritte nel cap. 3.6.1, il che spiega la "strana" dimensione quattro della rappresentazione di dimensione più bassa.

I pesi massimali sono della forma

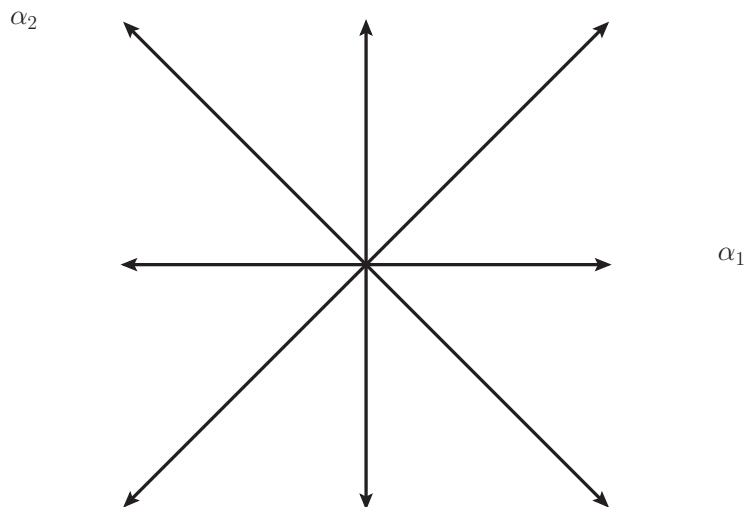
$$(63) \quad \lambda = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2$$

dove

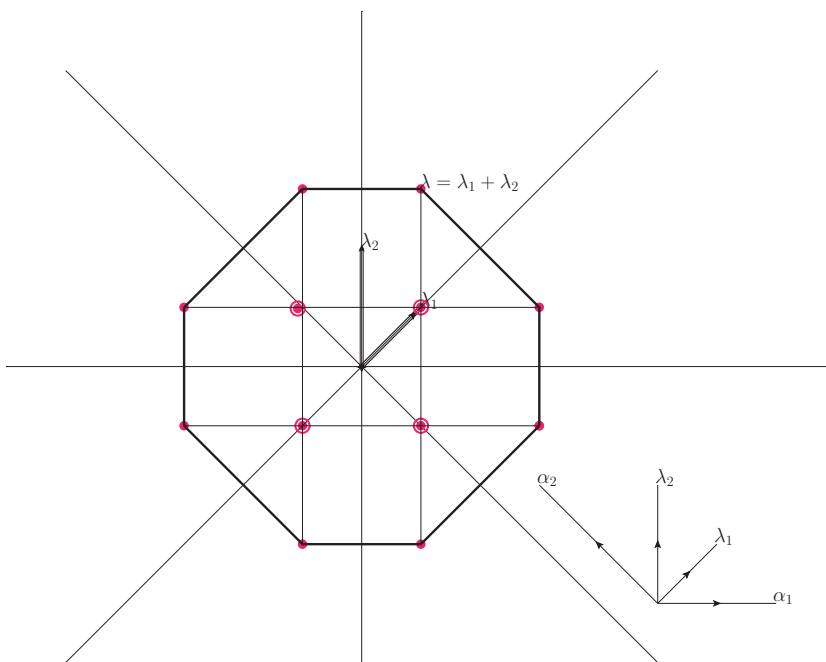
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che soddisfano la relazione  $\langle \alpha_i, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$  dove il prodotto è inteso come  $\langle \alpha, \lambda \rangle = (\alpha, A\lambda)$ . Dalla formula di Weyl si ottiene la dimensione della rappresentazione con peso massimo  $\lambda$  definito dall'Eq. (63):

$$\dim_{\lambda} = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + 2n_2 + 3)/6$$

FIGURA 31. Le radici di  $\mathfrak{so}(5)$ .

La rappresentazione di dimensione più bassa corrisponde a  $\lambda = \lambda_1$  con pesi  $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ . La rappresentazione aggiunta (dim=10) ha peso massimo  $\lambda = \alpha_2 + 2\alpha_1 = 2\lambda_1$  e i suoi pesi coincidono con le radici. La rappresentazione in Fig.5.2.

FIGURA 32. La rappresentazione con peso massimo  $\lambda = (1/2, 3/2)$  di  $\mathfrak{so}(5)$  (dimensione 16).

5.3. **L'algebra  $\mathfrak{G}_2$ .** L'algebra  $\mathfrak{G}_2$  è la quarta algebra semisemplice di rango due oltre a  $\mathfrak{su}(2)$ ,  $\mathfrak{so}(4)$  e  $\mathfrak{so}(5)$  che consideriamo in queste lezioni. È caratterizzata da una matrice di Cartan non



simmetrica

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui leggiamo le due radici semplici

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ovvero nella base ‘alla Gellman’

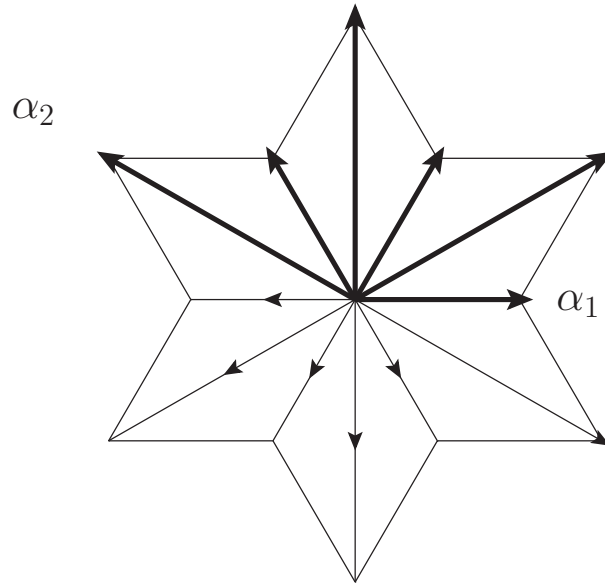


FIGURA 33. Lo spazio delle radici di  $\mathfrak{G}_2$ .

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Per esercizio ricavare la base duale (per trovare i pesi massimali) e la formula di Weyl per la dimensione della rappresentazioni. (Risultato: detto  $\lambda_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $\lambda_2 = (0, \sqrt{3})$ ,  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha = (1/2, 3\sqrt{3}/2)$ , peso massimale  $= \lambda = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2$ , si ha

$$\dim(\lambda) = \frac{(1 + n_1)(1 + n_2)(2 + n_1 + n_2)(3 + n_1 + 2 n_2)(4 + n_1 + 3 n_2)(5 + 2 n_1 + 3 n_2)}{120} .$$

5.4. **L'algebra  $so(6)$ .** Terminiamo con un esempio un pò più complicato: l'algebra del gruppo delle rotazioni in sei dimensioni. Il gruppo è importante nella sua continuazione analitica  $SO(4,2)$  alle trasformazioni ortogonali in uno spazio con metrica  $++++--$ , che compaiono anche come trasformazioni conformi (non-lineari) nello spazio di Minkowsky.

Un elemento generico dell'algebra è dato da una matrice antisimmetrica di dimensione sei. Detta quindi  $e^{(ij)}$  la matrice definita da

$$e_{lm}^{(ij)} = \begin{cases} 1 & (l = i, m = j) \\ -1 & (l = j, m = i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si avrà che l'insieme delle  $e^{(ij)}$  forma una base dell'algebra di Lie. Per  $so(6)$  si può identificare una sottoalgebra di Cartan attraverso la base  $\{e^{(12)}, e^{(34)}, e^{(56)}\}$ . Calcolando i commutatori e avendo così costruito la rappresentazione aggiunta si trova facilmente lo spazio delle radici. Questo si può fare agilmente utilizzando Mathematica.

---

```
Comm[X_, Y_] := X.Y - Y.X;
X[i_, j_] := SparseArray[{i, j} -> 1, {6, 6}] // Normal; /* definisce e^(ij) */
X[1] = X[1, 2] - X[2, 1];
. . . . .
X[15] = X[5, 6] - X[6, 5];
Table[Tr[X[j].X[k]], {j, 1, 15}, {k, 1, 15}] // MatrixForm /* Check the Killing form*/

Y = Sum[\[Alpha][j] X[j], {j, 1, 15}] /* elemento generico dell'algebra di Lie */

-1/2 Table[Tr[X[n].Comm[X[1], Y]], {n, 1, 15}] //Simplify // MatrixForm
-1/2 Table[Tr[X[n].Comm[X[10], Y]], {n, 1, 15}] //Simplify // MatrixForm
-1/2 Table[Tr[X[n].Comm[X[15], Y]], {n, 1, 15}] //Simplify // MatrixForm
```

---

Dall'output delle ultime tre istruzioni

$$\begin{aligned} &\{0, \alpha(6), \alpha(7), \alpha(8), \alpha(9), -\alpha(2), -\alpha(3), -\alpha(4), -\alpha(5), 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ &\{0, \alpha(3), -\alpha(2), 0, 0, \alpha(7), -\alpha(6), 0, 0, 0, \alpha(13), \alpha(14), -\alpha(11), -\alpha(12), 0\} \\ &\{0, 0, 0, \alpha(5), -\alpha(4), 0, 0, \alpha(9), -\alpha(8), 0, \alpha(12), -\alpha(11), \alpha(14), -\alpha(13), 0\} \end{aligned}$$

si deducono facilmente le matrici rappresentative degli elementi  $X[1], X[10], X[15]$  e precisamente

$$X[1] \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



il che si interpreta dicendo che ci sono tre autovalori nulli, corrispondenti alla sottoalgebra di Cartan e 12 autovalori distinti non nulli corrispondenti alle radici positive

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)$$

$$\alpha_2 = (1, 0, 1)$$

$$\alpha_3 = (1, 0, -1)$$

$$\alpha_4 = (1, -1, 0)$$

$$\alpha_5 = (0, 1, 1)$$

$$\alpha_6 = (0, 1, -1)$$

e alle sei radici negative  $\alpha_{i+6} = -\alpha_i$ .

Se si esamina con un plot in 3-dim lo spazio delle radici (vedi il codice matlab `so6roots.m`), si scopre che questo coincide con quello già noto di  $\mathfrak{su}(4)$  ! È un dato di fatto che esiste un omomorfismo tra  $SU(4)$  e  $SO(6)$  che si estende a un omomorfismo tra  $SU(2, 2)$  e  $SO(4, 2)$  che sta alla base del formalismo dei “twistors” di Penrose.

Si può verificare che una scelta di radici primitive è data da  $\alpha_1, -\alpha_3, \alpha_4$  e infatti  $\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_5$ ,  $-\alpha_3 + \alpha_4 = -\alpha_6$ ,  $\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2$ . Inoltre si verifica che la matrice di Cartan  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  calcolata sulle radici primitive dà giusto

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che coincide con la corrispondente matrice per  $\mathfrak{su}(4)$ . Per esercizio si determini la base duale e la formula di Weyl per la dimensione delle rappresentazioni irriducibili.

*risultato :*

$$\dim(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{12} (n_1 + 1) (n_2 + 1) (n_1 + n_2 + 2) (n_3 + 1) (n_2 + n_3 + 2) (n_1 + n_2 + n_3 + 3)$$

che coincide come dobbiamo attenderci con la formula già trovata per  $\mathfrak{su}(4)$ .

# INDICE ANALITICO

## Symbols

SO(4).....	30
SO(6).....	74
SU(2).....	28
SU(3).....	33
S <sub>3</sub> .....	3
S <sub>4</sub> .....	16
Sp(2).....	31
#.....	9
Δ.....	65
Ω <sup>-</sup> .....	65
Ind <sub>λ</sub> Γ.....	9
℔ <sub>2</sub> .....	72
∧ prodotto esterno.....	28
so(5).....	71
8 ⊗ 8.....	55
su(N) 52	
su(4) 65	

## A

algebra di Cartan su(4) 66	
algebra di Lie.....	23
ammoniaca molecola di.....	14

## B

B. Hall.....	41
barioni.....	65
base duale.....	42

## C

carattere.....	3
Cartan.....	66
∧.....	28
sotto-algebra di.....	37
teorema.....	39
Clebsh–Gordan serie di.....	55
cociclo.....	8

## D

dimensione di IRREP's.....	50
----------------------------	----

## F

forma di Killing–Cartan.....	37
Frobenius.....	12

## G

Gellmann.....	33, 63
Gruppi finiti.....	2
gruppo Euclideo.....	19
di Lorentz.....	19
di Poincaré.....	31

## H

Haar misura di.....	27
Hamermesh.....	3
Helgason.....	37
Humphreys.....	41

## I

integrazione sui gruppi.....	27
irriducibili rappresentazioni.....	3

## K

Killing forma di.....	37
--------------------------	----

## L

Lie, Sophus.....	19
------------------	----

## M

map esponenziale.....	24
mesoni.....	64
metano molecola di.....	16
misura di Haar.....	27
per SU(2).....	29
modi zero.....	13
molecole.....	13
moltiplicatore.....	8

## O

omomorfismo SU(2) ~ SO(3).....	24
omomorfismo SU(4) ~ SO(6).....	74
ortogonalità.....	5
dei caratteri.....	6
Oscillatore armonico.....	49

## P

Poincaré gruppo di.....	31
Prodotti diretti di IRREP' s.....	53

**Q**  
quaternioni ..... 10

**R**  
Racah-Speiser  
  algoritmo di ..... 57  
radici  
   $su(3)$  37  
  di  $su(4)$  67  
radici positive ..... 45  
rappresentazioni ..... 3  
  di  $SO(3)$  ..... 25  
rappresentazioni indotte ..... 8  
regolare  
  rappresentazione ..... 7

**S**  
Schur  
  lemmi di ..... 4  
Serre ..... 70  
somma di momenti angolari ..... 53

**T**  
teorema di reciprocità ..... 12  
traccia ..... 3

**U**  
unitarie  
  rappresentazioni ..... 4

**V**  
vibrazioni molecolari ..... 13

**W**  
Weyl  
  formula di ..... 50, 68, 71, 73, 76

**Y**  
Young  
  diagrammi di ..... 51

## BIBLIOGRAFIA

- [CS60] H. C. Corben and P. Stehle, Classical Mechanics, 2nd ed., J. Wiley, New York, 1960.
- [FS97] J. Fuchs and C. Schweigert, Symmetries, Lie Algebras and Representations, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge U.P., 1997.
- [Geo99] H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, ABP, Westview, 1999.
- [Hal03] B. Hall, Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Springer, 2003.
- [Ham62] M. Hamermesh, Group Theory and its Applications to Physical Problems, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.
- [Hel78] S. Helgason, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [Hum72] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.
- [Kna96] A.~W Knapp, Lie Groups beyond an introduction, second edit. 2002 ed., Birkhauser, 1996.
- [LL76] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Meccanica quantistica, teoria non relativistica, Editori Riuniti, Roma, 1976.
- [Ono09] E. Onofri, Lezioni sulla Teoria degli Operatori Lineari, U.Parma, 2009, on line su [www.fis.unipr.it/home/enrico.onofri](http://www.fis.unipr.it/home/enrico.onofri).
- [Par94] Particle Data Group, Review of Particle Properties, Phys. Rev. D **50** (1994), 1173.
- [Ste94] S. Sternberg, Group Theory and Physics, Cambridge U.P., 1994.