

LOOPHOLES, WORMHOLES E BUCHI NELL'ACQUA

Lo sviluppo del paradosso EPR

Davide Bracali

Alessia Camuti Borani

1 IL TRATTATO EPR

1.1 UNA NUOVA VISIONE

Durante gli anni '20 del '900 si assiste allo sviluppo esplosivo della teoria della meccanica quantistica. Nomi illustri della fisica si adoperano per contribuire alla scrittura di un nuovo linguaggio che permette di capire a fondo ciò che succede nell'universo non osservabile. Come tutte le teorie, però, anche la meccanica quantistica ha dei limiti.

Nel 1935 Einstein, Podolski e Rosen pubblicano un articolo su *Physical Review* che mette in discussione la completezza della descrizione della realtà fornita dalla teoria quantistica. Il trattato diventa immediatamente argomento di discussione e tuttora si trova tra i 10 *papers* più influenti mai pubblicati dal giornale.

1.2 CONCETTI BASILARI DI MECCANICA QUANTISTICA

La sezione introduttiva dell'articolo definisce una teoria completa come "una teoria nella quale ogni elemento di realtà ritrova la sua controparte". Per studiarne la completezza, gli autori procedono a descrivere alcuni concetti basilari della meccanica quantistica, prendendo come esempio una particella che ha un singolo grado di libertà:

- La **funzione d'onda** ψ descrive lo stato del sistema ed è funzione delle variabili scelte per descrivere il comportamento della particella.
- Gli **operatori** agiscono sulla funzione d'onda e corrispondono alle osservabili fisiche proprie della particella.
- Quando lo stato in cui si trova il sistema è autofunzione di un operatore, l'azione di quest'ultimo si riduce a quella di un **autovalore** su ψ . Questo numero corrisponde alla misura della grandezza correlata all'operatore quando il sistema si trova nello stato ψ .
- Quando lo stato del sistema non è autofunzione di un qualche operatore non è possibile determinare il valore dell'osservabile associata senza effettuare misure dirette, che però disturbano il sistema e ne alterano lo stato.

- Studiando l'esempio degli operatori momento e posizione si deduce che entrambi non possono essere conosciuti simultaneamente (principio di indeterminazione di Heisenberg). A livello matematico ciò si verifica quando i due operatori non commutano tra loro.

Da quest'ultimo passaggio si possono trarre due conclusioni alternative: o la descrizione fornita dalla funzione d'onda non è completa oppure le quantità fisiche corrispondenti ai due operatori non commutanti non possono avere una realtà simultanea.

1.3 FUNZIONE D'ONDA: DESCRIZIONE COMPLETA O INCOMPLETA

Per capire quale delle due opzioni riportate sopra sia quella vera, inizialmente si ipotizza che la descrizione fornita dalla funzione d'onda sia effettivamente completa.

Si procede a studiare l'insieme di due sistemi (ad esempio due particelle) che vengono fatti interagire per una durata di tempo limitata t , dopo la quale smettono di influenzarsi reciprocamente. Si studia quindi la funzione d'onda ψ totale ad un tempo maggiore di t , composta da termini riferiti al sistema 1 ed altri al sistema 2.

Quando si misura una prima osservabile A sul sistema 1 la funzione d'onda totale è descritta dalla composizione lineare di autofunzioni di A $u(x_1)$ prese come base, moltiplicate per coefficienti che dipendono dalle variabili che descrivono il secondo sistema:

$$\psi_{tot}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1)$$

Se la misura di A restituisce l'autovalore a_k la funzione d'onda totale collassa nello stato u_k per quanto riguarda il sistema 1, mentre la funzione d'onda del sistema 2 è descritta dal coefficiente del termine u_k .

Effettuando una misura di A sul primo sistema si ha quindi quest'ultimo nello stato u_k mentre il secondo nello stato ψ_k .

Il procedimento viene ripetuto misurando sul primo sistema una seconda osservabile B . In questo caso le autofunzioni di B prese come base per la descrizione di ψ_{tot} saranno diverse da quelle di A , e saranno differenti anche i coefficienti:

$$\psi_{tot}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2) v_n(x_1)$$

Nel caso la misura di B restituisca l'autovalore b_k , il primo sistema si troverà in uno stato v_k , mentre il secondo nello stato ϕ_k .

Ciò che risulta controintuitivo è che la misura di una diversa quantità sul sistema 1 influenzi lo stato in cui si trova il sistema 2, nonostante i due abbiano smesso di interagire ad un istante t precedente al tempo in cui viene valutata l'osservabile.

Si riescono, infatti, ad associare due diverse funzioni d'onda alla stessa realtà, ovvero al secondo sistema. Per concludere che ψ_k e φ_k sono autofunzioni di operatori non commutanti ci si serve di un esempio, ancora una volta riguardante gli operatori momento e posizione delle due particelle 1 e 2 che corrispondono ai due sistemi. La funzione d'onda totale è del tipo:

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{h}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

con x_0 costante. Si misura il momento della prima particella, che ha autovalore p ed autofunzione:

$$u(x_1) = e^{\frac{2\pi i}{h} p x_1}$$

Basandosi sulla forma della ψ_{tot} si ricava la funzione d'onda del sistema 2:

$$\psi(x_2) = e^{\frac{2\pi i}{h}(-x_2 + x_0)p}$$

che non è altro che l'autofunzione dell'operatore $P = \frac{h}{2\pi} \frac{d}{dx_2}$ corrispondente all'autovalore $-p$ nel secondo sistema. In questo modo si individua un operatore (P) di cui lo stato del secondo sistema è autofunzione.

Allo stesso modo si procede individuando prima l'autofunzione dell'operatore posizione nel primo sistema e successivamente lo stato del secondo sistema deducendolo dalla funzione d'onda totale. Questo risulta essere:

$$\phi(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h \delta(x - x_2 + x_0) dp$$

che è autovalore dell'operatore Q definito come $Q = x_2$. Si sono quindi associati alle due funzioni d'onda del secondo sistema due operatori P e Q di cui si riesce a calcolare il commutatore che risulta diverso da 0. Misurando gli operatori momento o posizione sul primo sistema, si riescono quindi ad ottenere immediatamente la misura di P , o in alternativa di Q sul secondo. Le due grandezze non sono mai quantificabili nello stesso momento, perchè non essendo possibile misurare insieme momento e posizione sul primo sistema non sarà possibile misurare P e Q sul secondo. Resta comunque il fatto che le autofunzioni di P e Q appartengono alla stessa realtà, perchè prendendo come definizione di elemento di realtà un operatore che ha per autofunzione lo stato in cui si trova il sistema entrambi rispettano questa condizione.

Si arriva dunque ad una contraddizione: due quantità fisiche P e Q hanno una realtà simultanea nonostante gli operatori non commutino. Questo porta a concludere che l'ipotesi iniziale sia falsa, ovvero che la funzione d'onda non riesca a dare una descrizione completa della realtà, anche variando la definizione che si dà di realtà simultanea. Se si considerano, infatti, due quantità che appartengono alla stessa realtà come quantità che possono essere misurate **contemporaneamente**, P e Q non rientrano più nella definizione. È però da

ricordare che il valore di P e Q è ricavato da misure effettuate sul primo sistema, che ha smesso al tempo t di interagire con il secondo. Dire che le due quantità non possono avere realtà simultanea sarebbe far dipendere la realtà di queste da una misura eseguita su un sistema che non influenza più quello a cui si riferiscono. Questo non è permesso da alcuna definizione di realtà.

2 LA FISICA POST-EPR

2.1 BOHM E AHARONOV: DALL'ASTRAZIONE AL LABORATORIO

L'esperimento mentale presentato da Einstein, Podolsky e Rosen trova il suo primo riscontro in laboratorio grazie agli scienziati David Bohm e Yakir Aharonov. Nel 1957, i due pubblicano su *Physical Review* un trattato in cui si analizza un esperimento concettualmente analogo a quello proposto da EPR, ma che porta gli esempi pratici dello studio dello spin di una coppia di elettroni e della direzione polarizzazione di una coppia di fotoni.

Gli autori iniziano descrivendo un sistema composto da due elettroni, in particolare una molecola formata da due atomi, che si trova in una situazione di singoletto $S_{tot} = 0$. Quest'ultimo è una composizione lineare di due stati: il primo, in cui la particella 1 ha spin orientato in direzione positiva e la 2 in direzione negativa e il secondo in cui la situazione è invertita, moltiplicati per una costante di normalizzazione:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(1)\psi_-(2) - \psi_-(1)\psi_+(2)]$$

I due atomi sono successivamente separati tramite un metodo che lascia invariato lo spin totale. Si passa quindi a considerare il sistema in un secondo momento dopo la separazione, quando le due particelle sono abbastanza lontane da non influenzarsi più a vicenda. In questa configurazione si misurano direzione e verso dello spin di una delle due particelle: ne consegue che, conoscendo il valore totale dello spin iniziale, potremo immediatamente dedurre direzione e verso dello spin per la seconda particella.

Nella fisica classica, ciò non è un problema: lo stato delle particelle è determinato dall'inizio, ed in ogni punto del cammino si ritrovano gli stessi valori di partenza per verso e direzione dello spin. Nel caso quantistico il problema c'è: essendo lo stato di una particella la sovrapposizione di tutti gli stati possibili, risulta che effettuando una misura su una delle due particelle si abbia come risultato il collasso della funzione d'onda della seconda particella in un'autofunzione che dipende esclusivamente dalla misura effettuata sulla prima.

Inoltre, quando si effettua una misura di spin lungo una direzione, l'effetto dell'apparato è di disturbare il sistema a tal punto da non poter conoscere le restanti due.

Ciò che genera un paradosso nel caso di due particelle è che misurando lo spin in una direzione per il sistema 1, l'azione dell'apparato di misura sembra avere conseguenze anche sul secondo sistema, con il quale però non interagisce. La seconda particella, infatti, subisce un collasso della funzione d'onda identico in principio a quello della prima, con la determinazione di una componente dello spin e conseguente fluttuazione delle restanti due.

2.2 DA ELETTRONI A FOTONI

Al tempo dell'articolo un esperimento del genere era estremamente difficile da replicare in laboratorio e, per questo, si decide di studiarne una variazione replicabile molto più facilmente.

L'esperimento che Bohm e Aharonov preparano in laboratorio si basa sullo studio di fotoni prodotti dall'annichilazione di una coppia elettrone-positrone. Questi vengono emessi con momento opposto e direzioni di polarizzazione ortogonali tra loro.

L'analogia con gli elettroni è supportata dal fatto che in entrambi i casi un sistema può trovarsi in stati mutualmente esclusivi. Per lo spin questi sono spin "up" e spin "down", mentre per i fotoni le due direzioni di polarizzazione possibili. Tramite considerazioni sulle direzioni di polarizzazione dei fotoni si può concludere che questi possono esistere solamente in stati perpendicolari fra loro. La funzione d'onda del sistema totale raggiunge quindi una forma estremamente simile a quella per lo spin: una composizione di stati mutualmente esclusivi che lasciano intatto il momento angolare totale del tipo:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1^x C_2^y - C_1^y C_2^x)$$

con C operatori di creazione lungo i due diversi assi x e y. Il modo ideale di verificare che le direzioni di polarizzazione dei due fotoni emessi siano sempre perpendicolari (e quindi che la misura su un sistema determini lo stato dell'altro sistema) sarebbe di misurarle per un insieme di coppie di fotoni, ma questo non risulta così fattibile in pratica. Si sceglie quindi di misurare il *rate* di fotoni emessi prima ad un angolo di 90° tra di loro e poi ad un angolo di 0° ed il risultato coincide con la teoria.

2.3 THE UNAVOIDABLE PARADOX

"Careful, Watson! To be unable to solve a paradox is one thing, but fail to perceive that one exists is less pardonable"

L'uscita del trattato EPR da inizio ad un susseguirsi di teorie ed esperimenti, volti sia a comprendere meglio il paradosso sia a trovare una maniera per arginarlo.

Diversi scienziati, primi tra cui proprio gli autori dell'articolo, infatti proveranno a trovare soluzioni per giustificare il comportamento apparentemente contraddittorio della meccanica quantistica, spesso ritrovandosi a fare buchi nell'acqua.

Alcune fra le varie teorie suggerite per dare una spiegazione al paradosso EPR e successivamente scartate sono:

- **L'azione a distanza:** un'interazione nascosta ed immediata tra i due sistemi e l'apparato che, però, violerebbe il principio di relatività.
- L'idea che, dopo una certa distanza, la meccanica quantistica segua **leggi diverse**. Questa ipotesi, formulata da Einstein in una comunicazione privata, verrà poi smentita dalla discussione di W.Furry.
- La soluzione di Bohr, per cui l'apparato e le due particelle formerebbero un unico sistema combinato impossibile da analizzare correttamente in parti distinte. Questa teoria non è tanto sbagliata quanto incompleta: quale sarebbe l'origine della correlazione tra le diverse parti dell'unico sistema?
- Un'ipotesi simile a quella di Bohr, ma che non esclude l'analisi singola delle diverse componenti del sistema. Il paradosso sarebbe causato o da un **quantum potential**, inconsistente con la teoria della relatività, oppure da leggi riguardanti un **subquantum mechanical level**, che avrebbe per la meccanica quantistica lo stesso rapporto che hanno fisica atomica e macroscopica.
- Le **variabili nascoste** teorizzate da Einstein, Podolsky e Rosen che, se individuate, sancirebbero l'incompletezza della meccanica quantistica. L'esistenza delle variabili nascoste viene smentita da J.S.Bell, che con il suo esperimento apporta un contributo fondamentale allo sviluppo del paradosso EPR.

3 LA DISCUSSIONE DI BELL

3.1 EPR SECONDO BELL

Una delle apparenti soluzioni al paradosso EPR sostiene che **la teoria quantistica è incompleta: servono delle “variabili nascoste”** aggiuntive per poter ottenere una teoria completa, che rispetti le ipotesi di causalità e località.

La pubblicazione di Bell "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox" del 1964 vuole mostrare come la meccanica quantistica, **anche aggiungendo variabili nascoste**, sia una teoria per sua stessa natura **non-locale**. Non è quindi possibile, come Einstein sperava, trovare una teoria che implementi la meccanica quantistica in una descrizione completa e deterministica.

Consideriamo due particelle di spin $1/2$ che si formano in uno stato di singoletto ($S_{tot} = 0$), che si muovono liberamente in due direzioni opposte. Si misurino, ad esempio attraverso un magnete di Stern-Gerlach, gli spin $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ lungo una

direzione \vec{a} delle particelle 1 e 2. Il macchinario può restituire due possibili risultati $\vec{\sigma} \cdot \vec{a} = \pm 1$.

Le due particelle sono soggette a correlazione quantistica (oggi si parla di **entanglement**), in quanto se misuriamo $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = 1$ determiniamo istantaneamente che $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a} = -1$, sempre e comunque.

Se le due misure sono effettuate possono essere considerate **indipendenti**, allora lo spin della seconda particella dovrà essere **predeterminato**, in quanto la prima misura non può in alcun modo influenzare la seconda. Ma la meccanica quantistica descrive lo stato di un sistema in modo non deterministico (funzione d'onda), e se assumiamo la misura dello spin come predeterminata questo significa che la teoria quantistica non è completa e può essere implementata da un qualche parametro aggiuntivo.

3.2 LA DISUGUAGLIANZA DI BELL

Sia λ questo parametro aggiuntivo. λ può essere inteso come discreto o continuo, come una sola variabile o un set di variabili, non importa. Assumiamo, per semplicità, λ come un singolo parametro continuo. Consideriamo anche due direzioni diverse su cui misurare lo spin, \vec{a} per la particella 1 e \vec{b} per la 2 (\vec{a} e \vec{b} sono vettori di norma unitaria). Chiamiamo A la misura su 1 e B quella su 2. Le due misure sono dipendenti dalla direzione e dal parametro λ :

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$$

Ricordiamo che le due misure sono **indipendenti** tra loro. Sia $\rho(\lambda)$ una distribuzione di probabilità, allora il valore atteso del prodotto tra $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b})$, secondo la probabilità classica, è:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Questo dovrebbe equivalere, come prevede la descrizione quantistica per lo stato di singoletto, a:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Mostriamo esplicitamente questo calcolo. Lo stato di singoletto si rappresenta, utilizzando la notazione di Dirac come:

$$|\psi\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

dove $\begin{cases} |+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle \\ |-+\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle \end{cases}$, e $|\pm\rangle$ sono gli autostati dello spin lungo un asse arbitrario.

Per fare un esempio se l'asse indicato è l'asse z allora $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono gli autovettori della matrice di Pauli σ_z , collegati allo spin attraverso la relazione $S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$.

Dobbiamo ora considerare le misure di spin su due assi arbitrari \vec{a} e \vec{b} . Per rendere i calcoli più semplici possiamo considerare $\vec{a} = \hat{z}$ e \vec{b} che giace sul piano yz , inclinato rispetto ad \vec{a} di un angolo θ . Il risultato che andremo a ricavare sarà invariante per rotazioni, e potrà essere generalizzato ad assi \vec{a} e \vec{b} arbitrari con angolo compreso θ .

Supponiamo che sulla particella 1 venga misurato $\sigma_z = +1$ (ignoriamo, come nel trattato di Bell, il fattore $\frac{\hbar}{2}$). Allora lo stato corrispondente è $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dato che siamo in uno stato di singoletto siamo certi che per la particella 2 avremo $\sigma_z = -1$, che corrisponde allo stato $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cosa potremo misurare sull'asse arbitrario \vec{b} ? Per rispondere a questa domanda applichiamo l'operatore unitario di rotazione attorno all'asse x :

$$U = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} P\left(\begin{smallmatrix} \sigma_a = 1 \\ \sigma_b = 1 \end{smallmatrix}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ P\left(\begin{smallmatrix} \sigma_a = 1 \\ \sigma_b = -1 \end{smallmatrix}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Il valore di aspettazione di questa misura sarà dato da:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_j x_j P_j = +\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\cos(\theta) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

In particolare se $\vec{a} = \vec{b}$, ovvero se lo spin viene misurato sullo stesso asse, avremo $P(\vec{b}, \vec{b}) = -1$, e saremo quindi certi che le due misure daranno risultati opposti:

$$B(\vec{b}, \lambda) = -A(\vec{b}, \lambda)$$

Dunque, in termini probabilistici, possiamo riscrivere:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Sia \vec{c} un altro vettore unitario. Consideriamo la differenza:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int \left(A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda = \\ &= - \int \underbrace{A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)}_{\pm 1} \left(1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Nell'eseguire questo raccoglimento abbiamo tenuto conto del fatto che $(A(\vec{b}, \lambda))^2 = 1$. Il passaggio precedente può essere tradotto in una disuguaglianza:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int \left(1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right) \rho(\lambda) d\lambda$$

Riconoscendo che $-\int A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda = P(\vec{b}, \vec{c})$ e che $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$ per normalizzazione:

$$\boxed{1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})|}$$

Questa disuguaglianza prende il nome di **disuguaglianza di Bell**. Nei decenni successivi verranno riproposte diverse forme di tale uguaglianza, tutte rivolte alla discussione della tesi sostenuta da Bell.

È facile trovare situazioni in cui la disuguaglianza di Bell viene violata. Ad esempio, se i vettori \vec{a} e \vec{b} sono ortogonali, e \vec{c} è ottenuto ruotando \vec{a} verso \vec{b} di 45°:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ma $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si è dimostrato in questo modo che nessun modello che prevede variabili nascoste può essere adatto a descrivere i risultati previsti dalla meccanica quantistica.

3.3 LA DISUGUAGLIANZA CHSH

CHSH è una sigla nota per rappresentare il trattato di Clauser, Horne, Shimony e Holt del 1969, che ispirandosi al lavoro di Bell ricava una disuguaglianza (nota come disuguaglianza CHSH) per mostrare, con un esempio diverso, le contraddizioni a cui porterebbe una teoria a variabili nascoste. È infatti facile mostrare esempi dove tale disuguaglianza viene violata, motivo per cui fu usata come base per la realizzazione di tanti esperimenti rivolti a verificare la tesi di Bell (il più celebre è quello di Aspect).

Attualmente la disuguaglianza CHSH è utilizzata come uno degli esempi più intuitivi per ragionare sulla tesi di Bell. Il più recente trattato di Michael Nielsen e Isaac Chuang “*Quantum Computation and Quantum Information*” (2010), pubblicato dall’università di Cambridge, vuole ripresentare la disuguaglianza di Bell utilizzando un esempio più pratico.

Due personaggi ipotetici, Alice e Bob, sono in due località molto distanti, in modo che tra di loro sia impossibile la comunicazione in tempi brevi. Un terzo collega, Victor, prepara due particelle da spedire ad Alice e Bob. Supponiamo inoltre che ciascuna particella arrivi ai destinatari nello stesso preciso momento.

Quando Alice riceve la sua particella può decidere di effettuare una tra due possibili misure, A_0 o A_1 , che possono dare come risultato ± 1 . Allo stesso modo Bob può decidere se effettuare la misura B_0 o B_1 . Ipotizziamo che le misure che Alice e Bob possono effettuare rappresentino una **proprietà intrinseca** della particella analizzata. Consideriamo la seguente combinazione di misure:

$$A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 - A_1B_1 = (A_0 + A_1)B_0 + (A_0 - A_1)B_1$$

Dato che i possibili risultati di una misura sono ± 1 , avremo $A_0 = \pm A_1$. Dunque, ripetendo le misure un elevato numero di volte (Victor prepara nuove particelle) e prendendo i valori medi possiamo dire con sicurezza che:

$$\boxed{\langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \leq 2}$$

La **disuguaglianza CHSH** viene quindi presentata in questo modo. Essa è stata ricavata assumendo che:

- 1) Le proprietà fisiche misurate da Alice e Bob esistono indipendentemente dal fatto che siano o meno misurate (realismo);
- 2) La scelta di Alice non può influenzare quella di Bob e viceversa (località).

Si può mostrare come la meccanica quantistica possa violare la disuguaglianza appena presentata. Victor prepara, ad esempio, un paio di **qubit** (bit quantistici) correlati attraverso lo stato di singoletto:

$$|\psi\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

Definiamo ora le misure di Alice e Bob in termini di spin. Supponiamo che (omettendo ancora una volta il termine $\hbar/2$):

$$A_0 = \sigma_z, \quad A_1 = \sigma_x$$

$$B_0 = -\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}}$$

Notiamo che in questo modo, ricordando che $\langle (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}_2) \rangle = -\cos(\theta)$, con \vec{n}_1 e \vec{n}_2 versori unitari e indicando con θ l'angolo compreso tra di essi:

$$\langle A_0 B_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_0 B_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_1 B_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle A_1 B_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Risulta in questo modo evidente che $\langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle = 2\sqrt{2} > 2$, contraddicendo la disuguaglianza di Bell e confutando almeno una delle due ipotesi 1) o 2) poste preliminarmente.

4 ESPERIMENTI DI BELL

4.1 I PRIMI ESPERIMENTI

A partire dagli anni 70 vennero realizzati numerosi esperimenti di osservazione di una coppia di particelle soggette a correlazione per discutere la validità della tesi di Bell. La maggior parte degli esperimenti vennero realizzati studiando come proprietà intrinseca non tanto lo spin, come pensava Bell stesso, ma la direzione di polarizzazione di una coppia di **fotoni**. I due esperimenti più celebri furono quelli di Freedman e Clauser (1972) e di Aspect (1982). I risultati di tutti gli esperimenti dedicati sono, con buona approssimazione, **in accordo con quanto viene predetto dalla meccanica quantistica**. Viene quindi sostenuta la tesi di Bell, negando la possibilità di esistenza di variabili nascoste deterministiche.

Tuttavia gli esperimenti realizzabili presentano grandi limitazioni pratiche. Ad esempio, se un esperimento prevede due misure su due diverse particelle, perché esse siano confrontabili tali misure devono essere perfettamente sincronizzate. Tutti gli esperimenti effettuati nel corso del tempo sembrano però comunque violare le disuguaglianze di Bell. È quindi diffusa l'idea che se gli esperimenti presentano esito positivo, anche con apparati sperimentali imperfetti, essi presenterebbero lo stesso esito se la strumentazione a disposizione permettesse lo svolgimento perfetto degli esperimenti. Questo diffuso punto di vista diffuso ha portato alla creazione di una nuova branca della fisica chiamata **teoria dell'informazione quantistica**. Uno dei suoi principali successi è stata la dimostrazione che la violazione delle disuguaglianze di Bell permette la possibilità di usare in modo sicuro l'informazione utilizzando la cosiddetta crittografia quantistica attraverso stati correlati di coppie di particelle.

4.2 LOOPHOLES

Nonostante l'esito positivo di tutti gli esperimenti, nel corso degli anni, sono state presentate diverse critiche (*loopholes*) verso questo tipo di esperimenti. Alcune di esse sono:

- **Detection loophole:** un problema tipico nella misurazione dei fotoni consiste nel fatto che, nella pratica, solo una parte dei fotoni emessi viene rilevata. Non si può in questo modo escludere che, se tutti i fotoni fossero misurati, la disuguaglianza di Bell possa essere rispettata ed è quindi necessario, per sostenere la tesi, misurare una frazione sufficientemente larga di fotoni. Il rapporto η tra fotoni misurati ed emessi viene detto efficienza dell'esperimento. Venne dimostrato da Garg e Mermin che, per particelle completamente correlate, è sufficiente $\eta > 2(\sqrt{2} - 1) \approx 83\%$ per violare con sicurezza la disuguaglianza CHSH. Tale efficienza è molto difficile da raggiungere utilizzando coppie di fotoni, vennero perciò utilizzati altri metodi (sistemi di materia, ad esempio trappola ionica o atomi di azoto nel diamante), che però mostrarono di non rispettare il cosiddetto *locality loophole*. Più recentemente, tuttavia, le configurazioni ottiche sono riuscite a raggiungere efficienze di rivelazione sufficientemente elevate utilizzando fotorivelatori superconduttori, e le configurazioni ibride sono riuscite a combinare l'elevata efficienza di rivelazione tipica dei sistemi di materia

con la facilità di distribuzione dell'entanglement a distanza tipico dei sistemi fotonici.

- **Locality loophole:** una delle assunzioni necessarie per permettere il corretto svolgimento degli esperimenti è quella della località, ovvero l'ipotesi che la misura su una delle due particelle correlate non influenza il risultato della rispettiva misura sull'altra particella. Dato che la teoria della relatività nega il passaggio di informazione ad una velocità maggiore di quella della luce, per un esperimento svolto correttamente è necessario che il tempo impiegato per effettuare una misurazione e produrre un risultato sia inferiore al tempo impiegato da un segnale luminoso per percorrere la distanza tra i due siti di misurazione.
- **Coincidence loophole:** in molti esperimenti, in particolare quelli sulla polarizzazione dei fotoni, la correlazione tra due misure viene giudicata in base ai tempi di rilevamento. Se essi sono simili tra di loro, allora si può dire con un certo grado di sicurezza che le due misure possono essere confrontate. Tuttavia se la finestra di rilevamento del sensore risulta troppo larga è più difficile capire quali coppie di misure siano da confrontare. Per essere sicuri di effettuare misure realmente correlate è necessario che i sensori abbiano un intervallo di rilevamento sufficientemente corto per distinguere chiaramente gli eventi da misurare.
- **Memory loophole:** nella maggior parte degli esperimenti, le misure sono effettuate nello stesso luogo in cui è stata effettuata precedentemente almeno un'altra misura. Una teoria a variabili nascoste (dipendenti o non dipendenti dal tempo) potrebbe allora suggerire che le misure successive siano influenzate dalle precedenti. Tuttavia è stato mostrato da più ricercatori, all'inizio degli anni 2000, che se le impostazioni sperimentali vengono scelte casualmente prima di ogni misura allora il risultato dell'esperimento non viene influenzato dalle misurazioni precedenti.
- **Superdeterminismo:** per derivare la tesi di Bell è fondamentale che le eventuali variabili nascoste di cui ci domandiamo l'esistenza non siano correlate con l'apparato sperimentale. Si suppone infatti che l'autore dell'esperimento abbia "libero arbitrio" di scegliere il tipo di misurazione da effettuare su ogni particella. Tuttavia non si può escludere che una teoria a variabili nascoste possa influenzare in modo "superdeterministico" anche l'apparato sperimentale stesso, invalidando le ipotesi su cui si basa la tesi di Bell.

4.3 LA RICERCA DELL'ESPERIMENTO PERFETTO

Una volta accertato che gli esperimenti sostengono risultati che confermano la tesi di Bell, dopo l'importante lavoro di Aspect gli esperimenti successivi furono quasi tutti rivolti alla cosiddetta "chiusura dei loophole":

- Weihs (1998): questo esperimento è rivolto alla chiusura del "locality loophole" e del "memory loophole", ispirandosi all'esperimento di Aspect (1982). La scelta del rivelatore da utilizzare per ogni misura viene stabilita

da un generatore quantistico di numeri casuali, per essere sicuro che la scelta della misura da effettuare non venga influenzata dall'altra particella. La disuguaglianza CHSH venne violata di oltre 30 deviazioni standard.

- Rowe (2001): il “detection loophole” viene chiuso utilizzando una configurazione a trappola ionica. La trappola ionica è una configurazione che prevede la sospensione di ioni tramite campi elettrici e magnetici, e trova applicazioni in spettrometria di massa e informatica quantistica. I due ioni vengono fisicamente separati, anche a grandi distanze, e connessi da un unico cavo in fibra ottica. Lo stato elettronico di questi ioni sono correlati con la direzione di polarizzazione dei fotoni che essi emettono o assorbono. È stato dimostrato, analizzando l'interferenza dei fotoni, che i due ioni presentano correlazione quantistica. Il sistema ibrido utilizzato in questo esperimento permette di raggiungere un'efficienza circa del 90%.
- Hensen, Giustina, Shalm (2015): tre gruppi sperimentali riuscirono a realizzare tre esperimenti considerati ad oggi “*loophole-free*” (ad eccezione del superdeterminismo che difficilmente si potrà risolvere per via sperimentale). L'esperimento di Hensen misura gli spin degli elettroni degli atomi di azoto presenti nei diamanti, misurabili attraverso le sue proprietà di fotoluminescenza. I due siti sperimentali sono posti a 1,3 km di distanza, e la disuguaglianza CHSH viene violata con un p-value di 0,039. I due esperimenti di Giustina e Shalm invece utilizzarono coppie di fotoni correlati, combinando tre tipi diversi di generatori di numeri casuali per decidere il tipo di misurazione da effettuare per ogni misura. Uno di questi generatori, per fare un esempio, utilizza stringhe di bit prese da celebri film. Il p-value ottenuto risulta nell'ordine di 10^{-6} , riportando quindi un risultato altamente statisticamente significativo.
- Big Bell Test (2018): coinvolge 12 siti sperimentali situati in tutto il mondo, dove vengono svolti esperimenti utilizzando sia sistemi fotonici che sistemi di materia. Esso vuole chiudere il “memory loophole” utilizzando il principio del libero arbitrio: circa centomila partecipanti provarono un videogioco il cui scopo è quello di generare una stringa binaria volutamente casuale. Fu addirittura fornito agli utenti un feedback in tempo reale per avvisarli se inavvertitamente essi hanno generato pattern ricorrenti nella stringa di dati, incoraggiandoli a rendere la sequenza il più imprevedibile possibile. Tutti gli esperimenti realizzati ebbero esito concorde alla tesi di Bell, utilizzando la stringa binaria generata dagli utenti per scegliere il tipo di misurazione da effettuare su ogni particella analizzata.

5 ER=EPR E LA GRAVITÀ QUANTISTICA

5.1 UN' AUDACE IPOTESI

Non molti mesi fa ha fatto la comparsa su giornali, telegiornali e social network la notizia della creazione di un holographic wormhole all'interno di un computer quantistico di Google. Nonostante non si tratti di un tunnel spaziotemporale attraverso cui passare da un punto all'altro dell'universo in pochi secondi come ci porterebbe a pensare l'immaginario collettivo, il wormhole quantistico ha segnato un altro importante passo verso una migliore comprensione della meccanica

quantistica. Quello che molti non sanno è che dietro a questa scoperta si nasconde proprio il lavoro di Einstein Podolski e Rosen, oltre ad un altro lavoro di Einstein e Rosen riguardante la relatività generale.

Il trattato ER teorizza la possibilità di wormholes o ponti di Einstein-Rosen. Un concetto strettamente legato a quello di wormhole è quello di singolarità: un punto in cui la massa si concentra fino a curvare lo spazio-tempo così tanto da non riuscire più ad essere descritto dalle equazioni di Einstein. Invece di considerare la singolarità come una curvatura estrema dello spazio-tempo, nel trattato ER gli autori la trattano come un tubo extradimensionale capace di connettere due punti distanti nello spazio e nel tempo.

Pochi anni dopo, i due insieme a Podolsky pubblicano il trattato EPR, scoprendo il fenomeno dell'entanglement quantistico. Fino a pochi anni fa, a nessuno sarebbe venuto in mente di teorizzare un parallelo tra i due, ma nel 2013 L. Susskind e J.Maldacena propongono un'idea audace:

$$\boxed{\text{ER} = \text{EPR}}$$

Ciò che gli scienziati vogliono significare con questa sigla è l'esistenza di una correlazione tra il comportamento di particelle entangled e la creazione di wormholes che collegano due buchi neri.

Un esperimento mentale proposto dallo stesso Susskind è questo: si immagina di avere a disposizione una coppia di particelle correlate, e dopo averle trasportate in parti lontane dell'universo se ne comprime la massa dando origine a due buchi neri. Il risultato, secondo Susskind, è la formazione di “due buchi neri correlati” che si trovano in posizioni opposte nell'Universo e sono connessi mediante un gigantesco wormhole. Dunque, se l'equazione è giusta, i due buchi neri saranno collegati da un tunnel spaziotemporale e perciò l'entanglement potrà essere descritto utilizzando la geometria dei wormhole. Non solo, ma a livello subatomico, le particelle potranno essere connesse in qualche modo attraverso una sorta di “wormhole quantistico”.

L'ipotesi non è ancora stata verificata, ma la produzione di un wormhole olografico attraversabile da un qbit in un computer quantistico ha dato a scienziati di tutto il mondo l'impressione di essere sulla strada giusta.

Non essendo in grado di verificare sperimentalmente che i buchi neri si comportino come sistemi quantistici, si è costruito un sistema quantistico la cui descrizione assomigli a quella dello spazio-tempo.

L'idea alla base dell'esperimento è stata quella di costruire un circuito quantistico matematicamente equivalente ad un wormhole. Per fare questo si sono utilizzati due set di 7 qbits capaci di simulare un set di particelle entangled (modello SYK). Un ottavo qbit è poi aggiunto al set a destra, e appena questo avviene l'informazione che porta si espande nel set a destra. Un campo magnetico ruota gli stati dei qbit e l'informazione passa nel secondo sistema, per poi raggrupparsi in un solo qbit del secondo sistema: in questo modo, avviene un teletrasporto.

Da qui a dimostrare che $ER=EPR$ la strada è ancora lunga, ma questo esperimento fa pensare che la scienza stia procedendo nella giusta direzione.