

Even More Perturbative QCD ...

Lorenzo Magnea
Università di Torino
I.N.F.N. Torino
magnea@to.infn.it

XI Seminario Nazionale di Fisica Teorica

Abstract

Approfondiamo lo studio delle divergenze di massa in QCD perturbativa, concentrandoci sul processo di produzione di adroni in collisioni tra elettroni e positroni. Facciamo un conto esplicito e dettagliato a un loop, e ne traiamo utili lezioni valide a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni. Alcuni degli strumenti necessari per dimostrare i teoremi di fattorizzazione vengono introdotti, e si mostra come possono essere usati anche per risommare certe classi di contributi logaritmici a tutti gli ordini perturbativi.

Ubi maior ... :

G. Stermann: [An introduction to quantum field theory.](#)

P. Nason: <http://castore.mib.infn.it/~nason/misc/QCD...>

M.L. Mangano: <http://home.cern.ch/~mlm/talks/cern98...>

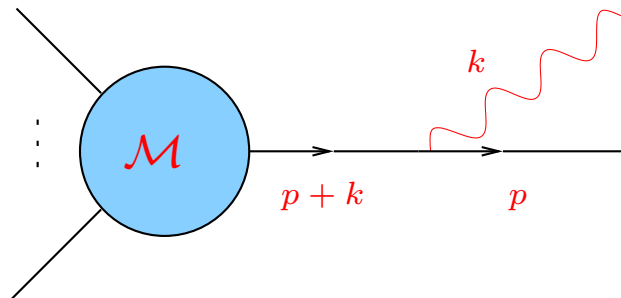
G. Stermann: [hep-ph/9606312.](#)

Indice

- **Sulle divergenze di massa in QCD perturbativa**
 - Divergenze di massa, basse energie e lunghe distanze.
 - Cancellazioni nelle osservabili fisiche, teorema KLN.
 - Osservabili infrarosso-finite e fattorizzabili in PQCD.
- **Un esempio concreto: $R_{e^+e^-}$**
 - Definizioni, diagrammi tagliati, tree-level.
 - $\mathcal{O}(\alpha_s)$: il conto.
 - Approssimazioni e osservazioni.
- **Altre quantità infrarosso finite**
 - Jet di Stermann–Weinberg.
 - Event shapes.
- **Metodi per la generalizzazione a tutti gli ordini**
 - Singolarità dei diagrammi e superfici intrappolate.
 - Equazioni di Landau e rappresentazione di Coleman-Norton.
 - Power-counting infrarosso e finitezza di $R_{e^+e^-}$.
- **Fattorizzazione e risommazione**
 - Problemi a più scale e grandi logaritmi.
 - Dalla fattorizzazione alla risommazione.
 - Esempi: il fattore di forma; il thrust.

Divergenze di massa: discussione qualitativa

- **Il fatto:** due tipi di divergenze in teoria dei campi associate alla presenza di particelle di massa nulla.
 - **Infrarosse** (IR). Emissione di particelle di quadrimpulso nullo ($\lambda_{DB} \rightarrow \infty$); caratteristiche delle teorie di gauge; presenti anche se la materia è massiva.
 - **Collineari** (C). Emissione di particelle in direzione parallela all'emittente; presenti se tutte le particelle nel vertice di interazione hanno massa nulla.
- **Esempio:** un fermione a massa nulla emette un bosone di gauge nello stato finale.



$$\rightarrow -ig\bar{u}(p)\not{\epsilon}(k)t_a\frac{i(\not{p}+\not{k})}{(p+k)^2+i\epsilon}\mathcal{M},$$

Singularità: $2p \cdot k = 2p_0k_0(1 - \cos \theta_{pk}) = 0$,
 $\rightarrow k_0 = 0$ (IR); $\cos \theta_{pk} = 0$ (C).

Nota: $p_0 = 0$ non causa problemi (le singularità sono sempre integrabili).

- **Origine delle singolarità di massa**
 - Nella teoria delle perturbazioni **covariante** (p^μ conservato in **ogni** vertice; particelle intermedie generalmente **off-shell**): il fermione nello stato intermedio è **on-shell**, quindi può propagarsi indefinitamente.
 - Nella teoria delle perturbazioni **hamiltoniana** (tutte le particelle sono **on-shell**, ma l'energia **non** è generalmente conservata nei vertici di interazione): il vertice di emissione IR/C **conserva l'energia**, dunque può essere situato a distanza arbitraria dal processo d'urto primario.
 - Le **divergenze di massa** sono originate da processi fisici che possono avvenire a **grandi distanze**.
- **Terapie disponibili.**
 - **Il malanno è grave.** In presenza di divergenze di massa, la matrice **S** non è definita nello spazio di Fock della teoria.
 - **Osservazione.** Le divergenze di massa sono associate alla compresenza di **stati sperimentalmente indistinguibili**: tutti i rivelatori hanno una **risoluzione finita** sia in angolo che in energia.
 - **Teorema (KLN).** Le quantità in linea di principio **fisicamente misurabili** (probabilità di transizione, sezioni d'urto, **sommate** su tutti gli stati fisicamente indistinguibili) sono **finite**, le divergenze di massa **si cancellano**.

- Il teorema KLN.

Data una teoria descritta da una Hamiltoniana H , sia $\mathcal{D}_\epsilon(E_0)$ l'insieme degli autostati dell'hamiltoniana aventi energie $E_0 - \epsilon \leq E \leq E_0 + \epsilon$, con $\epsilon \neq 0$. Sia $P(i \rightarrow j)$ la probabilità di transizione per unità di volume e per unità di tempo dall'autostato i all'autostato j . Allora la quantità

$$P(E_0, \epsilon) \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0)} P(i \rightarrow j)$$

è finita nel limite di masse nulle a tutti gli ordini perturbativi.

- **Nota.** In una teoria di campo **asintoticamente libera** il limite $m \rightarrow 0$ e il limite di alta energia formalmente **coincidono**. Le masse dipendono dalla scala e si ha $m^2(\mu^2) \rightarrow 0$ per $\mu^2 \rightarrow \infty$.
- **La situazione in QCD perturbativa**
 - La fisica delle **lunghe distanze** ($d \gtrsim 1\text{fm}$), ovvero delle **basse energie** ($E \lesssim 1\text{GeV}$) non è perturbativamente calcolabile.
 - Il teorema KLN non è direttamente applicabile nei casi in cui è necessaria una somma su stati iniziali (non abbiamo controllo sulla struttura degli stati adronici iniziali).
 - Lavorando a livello **partonico**, **perturbativo** si individuano sezioni d'urto sufficientemente **inclusive**, per cui
 - * la dipendenza dalle lunghe distanze è soppressa per effetto di cancellazioni (**IR-safe**);
 - * la dipendenza dalle lunghe distanze può essere raccolta in fattori universali, dipendenti dallo stato iniziale ma non dal processo duro in esame (**fattorizzabili**).

La strategia della QCD perturbativa

- Tutti i calcoli sono effettuati a livello partonico con un regolatore infrarosso (es.: $\epsilon = 2 - d/2 < 0$), in presenza di almeno una scala dura Q^2 . Si ottiene

$$\sigma_{\text{part}} = \sigma_{\text{part}} \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \left\{ \frac{m^2(\mu^2)}{\mu^2}, \epsilon \right\} \right) .$$

- Si costruiscono quantità **IR-safe**, aventi un limite finito quando il regolatore infrarosso viene rimosso ($\epsilon \rightarrow 0$, $m^2(\mu^2) \rightarrow 0$).

$$\sigma_{\text{part}} = \sigma_{\text{part}} \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \{0, 0\} \right) + \mathcal{O} \left(\left\{ \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^p, \epsilon \right\} \right) .$$

- Queste quantità **partoniche**, **inclusive**, che ammettono uno sviluppo perturbativo in potenze di $\alpha_s(Q^2) \ll 1$, sono interpretate come stime delle corrispondenti quantità **adroniche**, valide modulo correzioni $\mathcal{O}((\Lambda_{QCD}/Q)^p)$
- In presenza di adroni nello stato iniziale, si costruiscono quantità **fattorizzabili**, tali che

$$\sigma_{\text{part}} = f \left(\frac{m^2}{\mu_F^2} \right) * \hat{\sigma}_{\text{part}} \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m^2}{\mu_F^2} \right)^p \right) .$$

- La fattorizzazione dimostrata **a livello partonico** viene trascritta in termini adronici. Le funzioni di distribuzione sono **misurate**, le sezioni d'urto $\hat{\sigma}_{\text{part}}$ ricavate dal **calcolo perturbativo**.

Un esempio esplicito: $R_{e^+e^-}$

Il prototipo della sezione d'urto IR-safe è la sezione d'urto totale di annichilazione $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$.

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{1}{2q^2} \sum_X \int d\Gamma_X \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(k_1 + k_2 \rightarrow X)|^2 ,$$

normalizzata dividendo per la sezione d'urto di produzione di muoni

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

In $d = 4 - 2\epsilon$, all'ordine dominante in α ,

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{1}{2q^2} L_{\mu\nu}(k_1, k_2) H^{\mu\nu}(q^2) ,$$

$$L^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{q^4} (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\nu}) ,$$

$$H^{\mu\nu}(q^2) = e^2 \mu^{2\epsilon} q_f^2 \sum_X \langle 0 | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^d \delta^d(q - p_X) .$$

Per trasversalità, $q^\mu H_{\mu\nu} = q^\nu H_{\mu\nu} = 0$,

$$H^{\mu\nu}(q^2) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) H(q^2) ,$$

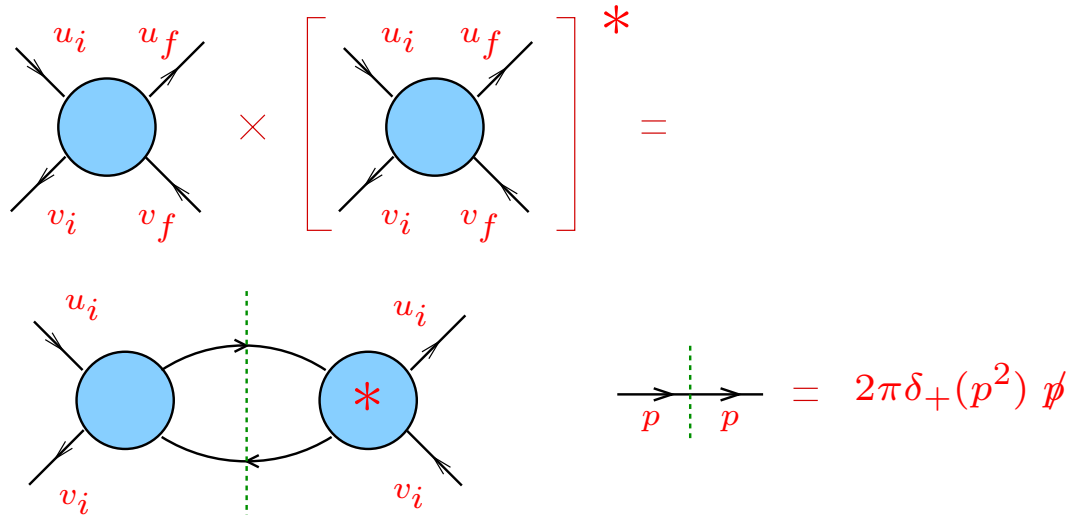
da cui segue facilmente

$$-g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}(q^2) = (3 - 2\epsilon) q^2 H(q^2) ,$$

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{2q^4} \frac{1 - \epsilon}{3 - 2\epsilon} (-g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}(q^2)) .$$

Interludio tecnico: diagrammi tagliati

Una utile rappresentazione per $|\mathcal{M}|^2$ è quella dei **diagrammi tagliati**. Esemplificando



A destra del taglio tutte le **i** nelle regole di Feynman e tutti gli impulsi cambiano segno.

Le regole si verificano facilmente usando l'identità

$$\begin{aligned} & (\bar{\omega}_1 [\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_i} \gamma_5 \cdots \sigma_{\mu\nu} \cdots \gamma_{\mu_n}] \omega_2)^* = \\ & \bar{\omega}_2 [\gamma_{\mu_n} \cdots \sigma_{\mu\nu} \cdots \gamma_{\mu_i} \gamma_5 \cdots \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1}] \omega_1, \end{aligned}$$

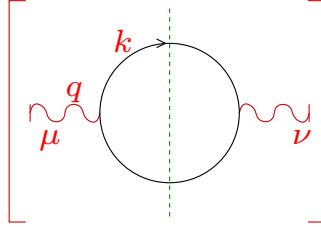
e l'hermiticità dei generatori del gruppo di gauge $[(t_a)_{ij}]^* = (t_a)_{ji}$.

Si noti che

- le regole sono valide a impulsi finali fissati; l'eventuale integrale sull'impulso di ogni loop tagliato diventa l'integrale sullo spazio delle fasi;
- per particelle di spin $\neq 0$ si pone sul taglio la somma sulle polarizzazioni;
- i segni dovuti ai loop tagliati fermionici sono corretti a tutti gli ordini.

Esercizio: $R_{e^+e^-}$ a tree-level

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{2q^4} \frac{1-\epsilon}{3-2\epsilon} (-g^{\mu\nu}) \left[\text{Diagram} \right]$$



$$-H_{\mu}^{\mu} = e^2 \mu^{2\epsilon} q_f^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d-2}} \delta_+(k^2) \delta_+((k-q)^2) \text{Tr} (\not{k} \gamma_{\mu} (\not{k} - \not{q}) \gamma^{\mu}) .$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa $(k-q)^2 = q^2 - 2\sqrt{q^2}k_0$; le due δ_+ possono essere usate per effettuare le integrazioni su k_0 e su $|\mathbf{k}|$; la traccia si riduce a $4(1-\epsilon)q^2$.

Sommando su sapori e colori dei quarks prodotti si ottiene

$$-H_{\mu}^{\mu} = 2(1-\epsilon) e^2 \mu^{2\epsilon} N_c \sum_f q_f^2 \left(\frac{q^2}{4} \right)^{1-\epsilon} \frac{\Omega_{2-2\epsilon}}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} .$$

L'angolo solido in d dimensioni è dato dalla classica formula

$$\Omega_d = \frac{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2)}{\Gamma(d)} .$$

Allora, in $d = 4 - 2\epsilon$,

$$-H_{\mu}^{\mu} = 2 \propto \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(2-2\epsilon)} q^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\epsilon} N_c \sum_f q_f^2 ,$$

da cui, per $\epsilon \rightarrow 0$, il noto risultato

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} N_c \sum_f q_f^2 \quad \rightarrow \quad R_{e^+e^-}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 .$$

Correzioni radiative

L'enumerazione dei grafici che contribuiscono alle correzioni radiative a un loop è semplice in termini di diagrammi tagliati.

$$\left[-H_{\mu}^{\mu}\right]^{(1)} = \text{diagramma 1} + \text{diagramma 2} + \text{c.t.}$$

Sommando sulle **posizioni dei tagli** si ottengono di volta in volta i diagrammi **reali** e quelli **virtuali**. Li esaminiamo separatamente.

Emissione reale

Conviene separare il calcolo della **probabilità di transizione** da quello dello **spazio delle fasi a tre corpi**. Seguendo le regole dei diagrammi tagliati otteniamo

$$\left[-H_{\mu}^{\mu}\right]^{(1,R)} = \int \frac{d^d p d^d k}{(2\pi)^{2d-3}} \delta_+(p^2) \delta_+(k^2) \delta_+((p+k-q)^2) \left[-\mathcal{H}_{\mu}^{\mu}\right].$$

La probabilità di transizione dipende da **un solo angolo polare**. Posto $u \equiv \cos \theta_{pk}$ nel sistema del centro di massa si ha

$$\delta_+((p+k-q)^2) = \vartheta(p'_0) \delta\left(s - 2\sqrt{s}(\hat{p} + \hat{k}) + 2\hat{p}\hat{k}(1-u)\right),$$

dove $\hat{p} = |\mathbf{p}|$, $\hat{k} = |\mathbf{k}|$. Le integrazioni sulle energie di p e di k possono essere effettuate usando le rispettive δ_+ . Tutte le integrazioni angolari sono banali tranne quella sulla variabile u .

Introducendo variabili adimensionali (le **frazioni di energia** del gluone e del quark)

$$z = \frac{2\hat{k}}{\sqrt{s}} \quad , \quad x = \frac{2\hat{p}}{\sqrt{s}} \quad ,$$

e definendo $y = (1 - u)/2$, si ottiene

$$\begin{aligned} \left[-H_\mu^\mu \right]^{(1,R)} &= \frac{1}{8} \frac{\Omega_{2-2\epsilon} \Omega_{1-2\epsilon}}{(2\pi)^{5-2\epsilon}} \left(\frac{s}{2} \right)^{1-2\epsilon} \int_0^1 dx x^{1-2\epsilon} \int_0^1 dz z^{1-2\epsilon} \\ &\times \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\epsilon} \frac{1}{1-yz} \delta \left(x - \frac{1-z}{1-yz} \right) \left[-\mathcal{H}_\mu^\mu \right] . \end{aligned}$$

La probabilità di transizione è data dalle regole di Feynman.

$$\begin{aligned} -\mathcal{H}_\mu^\mu &= -2e^2 \mu^{2\epsilon} \sum_f q_f^2 g^2 \mu^{2\epsilon} \text{Tr}(t_a t^a) \left(\frac{\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\sigma \not{p} \gamma^\mu (-\not{p}' - \not{k}) \gamma^\sigma \not{p}' \right]}{(2p \cdot k)(2p' \cdot k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\sigma \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \not{p}' \right]}{(2p \cdot k)^2} \right) , \end{aligned}$$

e può essere semplificata usando $\text{Tr}(t_a t^a) = N_c C_F$, identità dell'algebra di Clifford quali

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu &= -2(1 - \epsilon) \not{p} \quad , \\ \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma^\mu &= 4p \cdot k - 2\epsilon \not{p} \not{k} \quad , \\ \gamma_\mu \not{p} \not{k} \not{q} \gamma^\mu &= -2\not{q} \not{k} \not{p} + 2\epsilon \not{p} \not{k} \not{q} \quad , \end{aligned}$$

e con le identificazioni $p \cdot q = sx/2$, $p \cdot k = sxyz/2$, $k \cdot q = sz/2$.

L'integrazione sulla frazione d'energia del quark, x , può essere effettuata usando la restante δ . Le semplificazioni sono considerevoli e si ottiene

$$\begin{aligned} \left[-H_\mu^\mu \right]^{(1,R)} &= 2N_c C_F \sum_f q_f^2 \alpha_s (1 - \epsilon) \frac{\Omega_{2-2\epsilon} \Omega_{1-2\epsilon}}{(2\pi)^{3-4\epsilon}} q^2 \left(\frac{2\mu^2}{q^2} \right)^{2\epsilon} \\ &\int_0^1 dz dy \left[(1 - \epsilon)(1 - z)^{-2\epsilon} (1 - yz)^{-2-2\epsilon} z^{1-2\epsilon} (1 - y)^{1-\epsilon} \frac{1}{y^{1+\epsilon}} + \right. \\ &\left. (1 - z)^{1-2\epsilon} (1 - yz)^{-2-2\epsilon} z^{1-2\epsilon} [y(1 - y)]^{-\epsilon} \left(\frac{(1 - yz)^2}{yz^2(1 - y)} - \epsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Riconosciamo le singolarità preannunciate.

- **Infrarosse:** $z^{-1-2\epsilon}$, determina un polo in ϵ quando z , l'energia del gluone, tende a 0.
- **Collineari:** $y^{-1-\epsilon}$ e $(1-y)^{-1-\epsilon}$, singolari quando $y \rightarrow 0$ (gluone collineare al quark), e $y \rightarrow 1$ (gluone collineare all'antiquark).

Nota: le singolarità di massa sono regolate scegliendo $\epsilon < 0$.

Le integrazioni su y e z sono riconducibili a funzioni B di Euler (tipico di calcoli a un loop in problemi con una sola scala). Sviluppando intorno a $\epsilon = 0$ otteniamo il **risultato finale** per l'emissione reale, con il **polo doppio infrarosso-collineare**,

$$\begin{aligned} \left[-H_\mu^\mu \right]^{(1,R)} &= N_c C_F \alpha \sum_f q_f^2 \frac{\alpha_s}{\pi} q^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{2\epsilon} \\ &\times \frac{1 - \epsilon}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} - \pi^2 + \frac{19}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

Contributo virtuale

I contributi **puramente virtuali** all'ampiezza di produzione sono dati a tutti gli ordini dal **fattore di forma** del quark.

$$\Gamma_\nu(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) = \text{diagramma}$$

Il calcolo viene fortemente semplificato tenendo conto di diverse considerazioni preliminari.

- Nel caso di quark a massa nulla, il fattore di forma è dato da una **singola funzione scalare** che moltiplica la struttura di Dirac dell'ampiezza ad albero.

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) &\equiv \langle p_1, p_2 | J_\mu(0) | 0 \rangle \\ &= -ieq_f \bar{u}(p_1) \gamma_\mu v(p_2) \Gamma\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right),\end{aligned}$$

dunque la probabilità di transizione è **proporzionale** al risultato **tree-level**, con un fattore pari a **2 ReΓ**.

- Il fattore di forma è invariante sotto l'azione del gruppo di rinormalizzazione (ha **dimensione anomala nulla**) per effetto della conservazione della corrente elettromagnetica.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\epsilon, \alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right) \Gamma\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s, \epsilon\right) = 0.$$

QCD non viola l'identità di Ward di QED, $Z_1 = Z_\psi$.

- I grafici **riducibili** (1PR) su ciascuna linea fermionica, inclusi i rispettivi controtermini, ricostruiscono il residuo R_ψ del propagatore del quark. Dato che ogni linea esterna va moltiplicata per $R_\psi^{-1/2}$ secondo le formule di riduzione, occorre includere questi grafici su **una sola** delle due linee.
- Nel **gauge di Feynman** e in **regolarizzazione dimensionale** tutti i grafici 1PR con loop sulle linee fermioniche esterne sono **nulli** perché dati da integrali privi di scala ($p_i^2 = 0$).
 - **Nota!** Ciò è falso nei gauge assiali ($\exists n \cdot p_i$); inoltre dipende da una cancellazione di effetti IR e UV ...

A un loop queste osservazioni si riassumono nell'identità

$$+ + + = 0$$

Rimane **un solo grafico** da calcolare, la correzione di vertice

$$\Gamma_\nu^{(1)}(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) =$$

che vale

$$\Gamma_\nu^{(1)} = -eq_f g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\bar{u}(p_1) \gamma_\sigma (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^\sigma v(p_2)}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2}.$$

I passi per il calcolo del diagramma sono standard. Riassumendo

- Conviene fare uso sistematicamente delle condizioni di **mass-shell** (eq. di Dirac), $\bar{u}(p_1)\not{p}_1 = \not{p}_2 v(p_2) = 0$ e isolare gli integrali con diverse potenze di k .

$$\Gamma_{\nu}^{(1)} = -eq_f g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \bar{u}(p_1) \left[2q^2 \gamma_{\nu} I_0 + 2(\gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} \not{p}_1 - \not{p}_2 \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu}) I^{\alpha} - \gamma^{\sigma} \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu} \gamma_{\beta} \gamma_{\sigma} I^{\alpha\beta} \right] v(p_2) .$$

- Gli integrali tensoriali

$$I_0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

$$I_{\alpha} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\alpha}}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

possono essere calcolati con l'usuale parametrizzazione di Feynman.

– **Nota:** solo I_0 può avere divergenze IR, e solo $I_{\alpha\beta}$ può averne UV. Per I_{α} restano possibili divergenze collineari ...

- Può essere utile anche effettuare una decomposizione *à la Passarino–Veltman*, che permette di ottenere direttamente il fattore di forma scalare Γ .

$$I^{\alpha} = p_1^{\alpha} I_1 + p_2^{\alpha} I_2 ,$$

$$I^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} I_3 + p_1^{\alpha} p_1^{\beta} I_4 + p_2^{\alpha} p_2^{\beta} I_5 + (p_1^{\alpha} p_2^{\beta} + p_1^{\beta} p_2^{\alpha}) I_6 .$$

- In termini degli integrali scalari $I_1, \dots, I_6$ si ottiene

$$\Gamma^{(1)} = g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \left[4(1 - \epsilon)^2 I_3 - 2q^2 (I_0 + I_2 - I_1 + (1 - \epsilon)I_6) \right] .$$

- Il risultato finale per il **fattore di forma** è

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 - \epsilon)\Gamma(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right] .$$

Nel prenderne la **parte reale** occorre usare

$$(-q^2 + i\epsilon)^{-\epsilon} = (q^2)^{-\epsilon} e^{-i\pi\epsilon} .$$

Nota! Il segno di q^2 è determinato dalle **regole di Cutkosky**. A causa del polo doppio il fattore $\exp(-i\pi\epsilon)$ va sviluppato al **secondo ordine** e genera contributi numericamente importanti.

Risultato

Riconosciamo che il contributo virtuale ha la stessa struttura di poli IR-C dell'emissione reale. Sommandoli **i poli si cancellano** e si può prendere il limite $\epsilon \rightarrow 0$, ottenendo

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} N_c \sum_f q_f^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{3}{4} C_F + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) ,$$

Ovvero, per $SU(3)$, laddove $C_F = 4/3$,

$$R_{e^+e^-}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) .$$

Approssimazione soffice

La cancellazione ora esibita è possibile perché nei limiti IR e C l'ampiezza con l'emissione di un gluone reale diventa proporzionale all'ampiezza priva del gluone, come per il diagramma virtuale. Questo si può verificare introducendo l'approssimazione soffice.

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} = gt_{ij}^a \bar{u}(p) \left[\frac{\not{\epsilon}(k)(\not{p} + \not{k})\Gamma_\mu}{2p \cdot k} - \frac{\Gamma_\mu(\not{p}' + \not{k})\not{\epsilon}(k)}{2p' \cdot k} \right] v(p') .$$

Quando il gluone è IR si può

- trascurare k al numeratore, e nella definizione di p' ;
- commutare $\not{p}$ e $\not{p}'$ in modo da usare l'equazione di Dirac, $\not{p}'v(p') = \bar{u}(p)\not{p} = 0$.

Il risultato è

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} \Big|_{\text{soft}} = gt_{ij}^a \left[\frac{p \cdot \varepsilon}{p \cdot k} - \frac{p' \cdot \varepsilon}{p' \cdot k} \right] \mathcal{A}_0^\mu ,$$

dove $\mathcal{A}_0^\mu = \bar{u}(p)\Gamma^\mu v(p')$ è l'ampiezza al livello Born (indipendentemente dalla forma esplicita del vertice Γ_μ).

Osservazioni

- L'ampiezza soffice è **gauge-invariante** (si annulla se $\varepsilon \propto k$).
- L'emissione di gluoni soffici ha caratteri **universali**. I gluoni di grande lunghezza d'onda non percepiscono le caratteristiche locali dell'emittente (spin, struttura interna), ma solo la **carica** di colore e la **direzione** del moto. Queste considerazioni si generalizzano **all'emissione multipla**.
- Considerazioni analoghe valgono per l'emissione di gluoni **da gluoni**.

Sezione d'urto soffice

E' facile ritrovare la **parte singolare** della sezione d'urto di emissione reale. La **probabilità di transizione** si calcola sommando su colori e polarizzazioni (usando $\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu}$, qui lecito).

$$|\mathcal{A}_{\text{soft}}|^2 = g^2 C_F |\mathcal{A}_0|^2 \frac{2p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Si passa alla **sezione d'urto** integrando sullo spazio delle fasi

$$\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} = g^2 C_F \sigma_{q\bar{q}} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|(2\pi)^3} \frac{2p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Nel sistema del centro di massa ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) e nell'approssimazione soffice il quark e l'antiquark sono ancora “*back to back*”. Si ritrova allora la **struttura delle singolarità** IR e C.

$$\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{pk} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \frac{2}{(1 - \cos \theta_{pk})(1 + \cos \theta_{pk})}.$$

Il diagramma virtuale

L'approssimazione soffice può essere applicata anche ai **diagrammi virtuali**, con alcune attenzioni.

- Quando $k_\mu \ll \sqrt{q^2}$, $\forall \mu$, in generale oltre a trascurare k nei numeratori si può anche trascurare k^2 rispetto a $p_i \cdot k$ nei denominatori (approssimazione **eikonale**).
 - **Nota**: approssimazione **non** uniformemente valida, in certi casi diventa necessario deformare i percorsi di integrazione.
- Usando coordinate di cono luce possiamo porre

$$p^\mu = (p^+, 0, \mathbf{0}_\perp) , \quad (p')^\mu = (0, (p')^-, \mathbf{0}_\perp) .$$

- **Nota**: Per un generico quadrivettore, $v^\mu = (v^+, v^-, \mathbf{v}_\perp)$,
 $v^\pm = (v^0 \pm v^3)/\sqrt{2}$, $v^2 = 2v^+v^- - |\mathbf{v}_\perp|^2$.
- Consideriamo per esempio l'integrale I_0 , che dà origine al polo doppio virtuale. Nell'approssimazione eikonale e in $d = 4$

$$I_0^{(\text{eik})} = \frac{1}{32\pi^4 q^2} \int \frac{dk^+ dk^- d^2 k_\perp}{(-k^- + i\epsilon)(k^+ + i\epsilon)(2k^+k^- - |\mathbf{k}_\perp|^2 + i\epsilon)} .$$

Si vede che ci sono **tre regioni** di integrazione che danno luogo a **divergenze**. Si possono parametrizzare introducendo una **variabile di scaling** λ .

$$k^\mu \sim \lambda \sqrt{q^2} , \quad \forall \mu , \quad \rightarrow \quad \text{IR} ;$$

$$k^\pm \sim \sqrt{q^2} , k^\mp \sim \lambda^2 \sqrt{q^2} , |\mathbf{k}_\perp|^2 \sim \lambda \sqrt{q^2} , \quad \rightarrow \quad \text{COLL} .$$

Ordinamento angolare

L'approssimazione soffice è di notevole **importanza pratica** in QCD perturbativa.

- Mette in evidenza le proprietà universali della radiazione soffice di colore (**trasparenza di colore, ordinamento angolare**)
- E' punto di contatto tra la situazione perturbativa e quella non-perturbativa (**risommazioni, Monte-Carlo di adronizzazione**)

L'esempio più semplice di **ordinamento angolare** si ha considerando la sezione d'urto **differenziale** $d\sigma_{q\bar{q}g}$ in un sistema in cui il fotone che decade ha grande impulso **q**. Allora il quark e l'antiquark formano tipicamente un **angolo piccolo** ($\theta_{pp'} \ll \pi$), e si ha

$$\begin{aligned} d\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} &= d\sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} d\cos\theta_k \frac{d\phi_k}{2\pi} \frac{1 - \cos\theta_{pp'}}{(1 - \cos\theta_{pk})(1 - \cos\theta_{p'k})} \\ &= d\sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} d\cos\theta_k \frac{d\phi_k}{2\pi} \frac{1}{2} (W_q + W_{\bar{q}}) \end{aligned}$$

dove

$$W_q = \frac{1 - \cos\theta_{pp'}}{(1 - \cos\theta_{pk})(1 - \cos\theta_{p'k})} + \frac{1}{(1 - \cos\theta_{pk})} - \frac{1}{(1 - \cos\theta_{p'k})}.$$

mentre $W_{\bar{q}}$ si ottiene con lo scambio $p \leftrightarrow p'$.

L'originale distribuzione angolare è **positiva definita**, ma **singolare** sia per emissione parallela al quark che all'antiquark. Le distribuzioni parziali W_i non sono positive definite, ma hanno notevoli proprietà.

Proprietà di W_q e $W_{\bar{q}}$

- W_q è singolare solo quando $\cos \theta_{pk} \rightarrow 1$, al contrario di $W_{\bar{q}}$.
- La media azimutale di W_q (scelto come asse $\mathbf{p}$) si annulla se $\theta_{pk} > \theta_{pp'}$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi W_q(\phi) = \frac{2}{1 - \cos \theta_{pk}} \Theta(\theta_{pp'} - \theta_{pk}) ,$$

come si dimostra usando

$$\cos \theta_{p'k} = \cos \theta_{pk} \cos \theta_{pp'} + \sin \theta_{pk} \sin \theta_{pp'} \cos \phi .$$

Un'analoga equazione vale per $W_{\bar{q}}$.

- Le medie azimutali sono positive definite e possono essere interpretate come distribuzioni di probabilità per l'emissione di gluoni soffici separatamente dal quark e dall'antiquark.

Dunque: la distribuzione della radiazione soffice in media è data dalla somma di contributi scorrelati del quark e dell'antiquark, che si annullano al di fuori dei coni costruiti ruotando la direzione di uno dei fermioni intorno all'altro.

Commenti

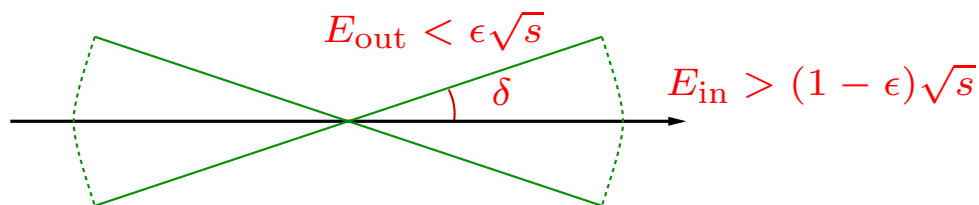
- Queste considerazioni si generalizzano ad ordini più elevati. Gluoni irradiati successivamente sono vincolati in media all'interno dei coni definiti dai gluoni e quark precedenti.
- L'evoluzione perturbativa nel limite soffice è locale nello spazio delle fasi, e tende a costruire singoletti di colore all'interno di fasci collimati di particelle (jet).

Jet di Sterman–Weinberg

Le configurazioni degli impulsi responsabili per le singolarità e per la loro cancellazione sono quelle **infrarosse** e **collineari**, come previsto.

Dunque non è necessario integrare l'emissione reale sull'intero spazio delle fasi per ottenere un risultato finito, è sufficiente considerare **osservabili sufficientemente inclusive**, tali che l'integrazione includa le configurazioni IR e C.

Prototipo: la sezione d'urto a **due jet**



Definizione: un evento si dice **a due jet** se $\exists$ due coni opposti al vertice di semiapertura δ , tali che tutta l'energia, tranne al più una frazione ϵ , fluisca all'interno dei coni.

A livello partonico:

- **Tutti** gli eventi all'ordine leading sono **a due jet**.
- All'ordine α_s sono a due jet gli eventi in cui il gluone è **IR** (in qualsiasi direzione sia emesso), o **COLL.** (con qualsiasi energia). Tutti gli altri eventi sono **a tre jet**.
- I contributi virtuali sono a due jet. Dunque la sezione d'urto partonica a due jet è **finita**.

In formule:

- All'ordine α_s^0 si ha $\sigma_{2j}^{(0)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}$.
- All'ordine α_s si hanno **solo** eventi a due o a tre jet, dunque

$$\sigma_{2j}^{(1)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(1)} - \sigma_{3j}^{(1)}(\epsilon, \delta) ,$$

- $\sigma_{3j}^{(1)}$ si calcola facilmente dall'**emissione reale** imponendo gli opportuni **tagli** sullo spazio delle fasi. In $d = 4$

$$\begin{aligned} \left[-H_{\mu}^{\mu} \right]_{3j}^{(1,R)} &= 2N_c C_F \sum_f q_f^2 \alpha \frac{\alpha_s}{\pi} q^2 \int_{2\epsilon}^1 dz \\ &\quad \times \int_{\delta^2}^{1-\delta^2(1-z^2/2)} dy \left[\frac{z(1-y)}{y(1-yz)^2} + \frac{1-z}{yz(1-y)} \right] . \end{aligned}$$

- Si trovano facilmente i **termini dominanti** per $\epsilon, \delta \rightarrow 0$. Combinando con la parte leptonica

$$\sigma_{3j}^{(1)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(0)} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left[4 \log(\delta) \log(2\epsilon) + 3 \log(\delta) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{4} \right] .$$

Osservazioni:

- La sezione d'urto totale è dominata da eventi a due jet per grandi q^2 (**libertà asintotica** per i jet ...).
- Al **crescere di q^2** il risultato perturbativo resta attendibile per con i più stretti, i jet sono **più collimati**.
- Si può calcolare (e verificare sperimentalmente) la **distribuzione angolare** degli eventi a due jet $d\sigma_{2j}/d\cos\theta \propto 1 + \cos^2\theta$, valida per quark di **spin 1/2**.

Variabili di tipo event–shape

Il meccanismo della cancellazione delle divergenze IR e C suggerisce una **ulteriore generalizzazione**: studiare distribuzioni di osservabili dipendenti dallo stato finale ma che assegnino **uguali pesi** a eventi che differiscano per radiazione IR o C.

Dato uno stato finale a m partoni, sia $E_m(p_1, \dots, p_m)$ l'osservabile. la **distribuzione** è definita da

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{1}{2q^2} \sum_m \int d\text{LIPS}_m \overline{|\mathcal{M}_m|^2} \delta(e - E_m(p_1, \dots, p_m)) ,$$

mentre i momenti (e in particolare il valor medio) sono

$$\langle e^n \rangle = \int_{e_{\min}}^{e_{\max}} de e^n \frac{d\sigma}{de} .$$

Nota: Si tratta di sezione d'urto “**pesate**”.

All'ordine α_s^{m-1} **si sommano** i contributi con $m+1$ partoni nello stato finale, con un partone virtuale e m reali, e così via.

$$\sigma(e) \Big|_{\mathcal{O}(\alpha_s^{m+1})} = \int d\sigma_{m+1}^{(R)} + \int d\sigma_m^{(1V)} + \dots .$$

La cancellazione IR-C è preservata se l'osservabile assume **lo stesso valore** per configurazioni che differiscono per radiazione IR o C.

$$\lim_{p_j^\mu \rightarrow 0} E_{m+1}(p_1, \dots, p_j, \dots) = E_m(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots) ,$$

$$\lim_{p_k^\mu \rightarrow \alpha p_j^\mu} E_{m+1}(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k, \dots) = E_m(p_1, \dots, p_j + p_k, \dots) .$$

Esempi di variabili di tipo event–shape

Esiste una considerevole varietà di **event shapes**. Alcuni esempi

- Il **thrust**

$$T_m = \max_{\hat{n}} \frac{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i \cdot \hat{n}|}{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i|} .$$

Evidentemente $0 < T_m \leq 1$, e $T_m = 1$ corrisponde a due fasci collimati di particelle “back to back”.

- Il **parametro C**

$$C_m = 3 - \frac{3}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{(p_i \cdot p_j)^2}{(p_i \cdot q)(p_j \cdot q)} .$$

Anche qui $0 \leq C_m \leq 1$; eventi a due jet hanno $C = 0$. La definizione è motivata in termini degli autovalori della parte spaziale del tensore energia impulso, $C = 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

- Le **masse di jet**

$$\rho_m^{(H)} = \frac{1}{q^2} \left(\sum_{p_i \in H} p_i \right)^2$$

H è uno dei due emisferi individuati dall'asse del thrust.

Osservazioni

- Le distribuzioni perturbative sono **singolari** nel limite a **due jet** (logaritmi del tipo $\alpha_s^n \log^{2n-1} C$), ma i valori medi sono finiti.
- Notevole **rilevanza fenomenologica** (esempio: determinazione di α_s , studio di correzioni di adronizzazione).
- Altre **definizioni** di eventi a **molti jet** possono essere viste come particolari event shapes.

Un paragone con QED

Anche in QED ci sono divergenze IR e, nel limite di massa nulla, collineari. Alcune similitudini e differenze.

- In QED, consideriamo per esempio il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.
 - $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ diverge a partire da $\mathcal{O}(\alpha^3)$.
 - Dunque σ_{Born} non è una buona approssimazione di σ . Non è un problema. Ciò che si osserva è $\sigma_{\text{tot}}(\Delta) = \sum_n \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- + n\gamma, \Delta)$, e per $\sigma_{\text{tot}}(\Delta)$, che è finita, σ_{Born} è una buona approssimazione.
 - Le divergenze IR in QED si risommano esplicitamente

$$\sigma_{\text{tot}}(\Delta) = \sigma_{\text{fin}} \exp \left[\frac{\alpha}{\pi} \log \left(\frac{\Delta^2}{q^2} \right) f(m^2, q^2) \right] .$$

dunque $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{\text{tot}}(\Delta) = 0$.

- Interpretazione: non è possibile produrre solo $\mu^+\mu^-$; gli stati asintotici di QED non sono fermioni isolati.
- In QCD, considerando $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, la situazione è quasi analoga.
 - $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ diverge a partire da $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s)$.
 - Dunque σ_{Born} non è una buona approssimazione di $\sigma = 0$ (confinamento). Invece è una buona approssimazione per $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$, che è finita.
 - Interpretazione: non è possibile produrre solo $q\bar{q}$; gli stati asintotici di QCD non sono quark e gluoni.

Sulle singolarità dei diagrammi di Feynman

Per studiare a tutti gli ordini le divergenze IR e C è necessario caratterizzare la generica struttura delle singolarità dei diagrammi di Feynman. Cominciamo da un esempio semplice, I_0 .

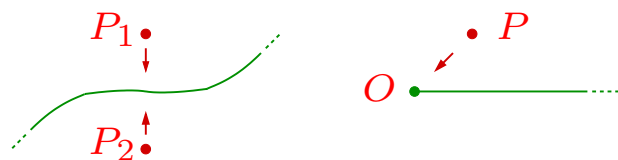
Un esempio: il fattore di forma scalare

Introduciamo parametri di Feynman y_1, y_2, y_3 . Allora

$$I_0 = 2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 \prod_{i=1}^3 dy_i \frac{\delta(1 - y_1 - y_2 - y_3)}{[y_1 k^2 + y_2(p - k)^2 + y_3(p' + k)^2 + i\epsilon]}.$$

Sia D_0 il denominatore. Le uniche possibili singolarità di I_0 corrispondono a superfici dove $D_0 = 0$. Tuttavia

- L'integrando è una funzione delle variabili complesse k^μ, y_i , con struttura analitica determinata dalla prescrizione $i\epsilon$.
- L'annullarsi di D_0 sul contorno di una integrazione non è sufficiente per determinare una singolarità. Il contorno può essere deformato.
- Solo in due casi non si può evitare la singolarità deformando: contorno intrappolato tra due poli, oppure singolarità di bordo, un polo migra a un estremo di integrazione.



- **Singularità di I_0**
 - Gli integrali in dk^μ non possono avere singolarità di bordo (I_0 è UV convergente). Tuttavia D_0 è quadratico in k^μ , quindi i due poli **possono intrappolare** il contorno se

$$\frac{\partial}{\partial k^\mu} D_0(y_i, k^\mu, p, p') = 0 .$$

- Gli integrali in dy_i possono **solo** avere singolarità di bordo (in $y_i = 0$), dato che D_0 è lineare in y_i . **Alternativamente**, D_0 può essere indipendente da y_i sulla superficie $D_0 = 0$, per cui y_i diventa inutilizzabile per la deformazione.
- **Equazioni di Landau per I_0**
Condizione necessaria per una singolarità di I_0 è che **tutte** le variabili di integrazione siano intrappolate. Ciò è espresso dalle **equazioni di Landau**

$$y_1 k^\mu - y_2(p - k)^\mu + y_3(p' + k)^\mu = 0 \quad \text{e}$$

$$y_i = 0 \quad \text{oppure} \quad l_i^2 = 0 ,$$

dove l_i^μ è l'impulso della linea con parametro y_i .

- **Soluzioni delle equazioni di Landau**
 E' facile trovare le soluzioni previste.

$$k^\mu = 0 ; y_2/y_1 = y_3/y_1 = 0 \quad \text{IR}$$

$$k^\mu = \alpha p^\mu ; y_3 = 0 ; \alpha y_1 = (1 - \alpha)y_2 \quad \text{C}$$

$$k^\mu = -\beta p^\mu ; y_2 = 0 ; \beta y_1 = (1 - \beta)y_3 \quad \text{C}$$

Riconosciamo le note singolarità IR e C. Esistono **altre soluzioni** delle equazioni di Landau?

- **Rappresentazione fisica di Coleman–Norton**

La **ricerca delle soluzioni** delle equazioni di Landau è **semplificata** dal fatto che esse ammettono una semplice **rappresentazione fisica**. Si osservi.

- Se una linea del loop è off-shell deve essere $y_i = 0$.
- Sia $\Delta x_i^\mu \equiv y_i l_i^\mu$, per ogni linea l_i on-shell. Allora

$$\Delta x_i^\mu = \Delta x_i^0 v_i^\mu \quad ; \quad v_i^\mu = \left(1, \frac{l_i}{l_i^0} \right) .$$

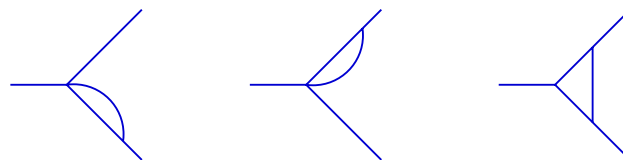
Interpretazione: Δx_i^μ descrive la **propagazione classica** di una particella di massa nulla con impulso l_i .

- Le equazioni di Landau per I_0 ora si scrivono

$$\sum_i \sigma(i) \Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{on shell}$$

$$\Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{off shell} .$$

- **Interpretazione:** le soluzioni delle equazioni di Landau sono date da **diagrammi ridotti**, in cui
 - le linee **off-shell** sono contratte a **punti**.
 - le linee **on-shell** corrispondono a **processi fisicamente possibili** per la propagazione classica di particelle di massa nulla.



Il caso generale

- Parametrizzazione di Feynman

Per mezzo dell'identità

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{D_i^{a_i}} = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(a_i)} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \left(dy_i y_i^{a_i-1}\right) \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^N y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N y_i D_i\right)^{\sum_{i=1}^N a_i}},$$

un arbitrario diagramma di Feynman $G(p_r)$ può scriversi

$$G(p_i) = \prod_{\text{linee}} \int_0^1 dy_i \delta\left(1 - \sum_i y_i\right) \prod_{\text{loops}} \int d^d k_l \frac{\mathcal{N}(y_i, k_l, p_r)}{[\mathcal{D}(y_i, k_l, p_r)]^N},$$

dove il denominatore $\mathcal{D}$ è la somma dei propagatori

$$\mathcal{D}(y_i, k_l, p_r) = \sum_{\text{linee}} y_i \left(l_i^2(p, k) - m_i^2\right) + i\epsilon,$$

e gli impulsi delle linee sono funzioni lineari di p_r e k_l .

- Equazioni di Landau

$$\sum_i \eta_{ij} \Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{on shell, } \forall j/i \in j,$$

$$\Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{off shell.}$$

- Rappresentazione di Coleman–Norton

Le soluzioni sono nuovamente i diagrammi ridotti (linee off-shell contratte a punti), in cui tutti i loop restanti sono interpretabili come processi classici possibili. Scelto un loop, si devono poter associare ai suoi vertici coordinate x_k^μ , $k = 1, \dots, M$ tali che

$$\Delta x_{12}^\mu + \dots + \Delta x_{M1}^\mu = 0, \quad \Delta x_{ij}^\mu \equiv x_i^\mu - x_j^\mu.$$

Esempio: la funzione a due punti

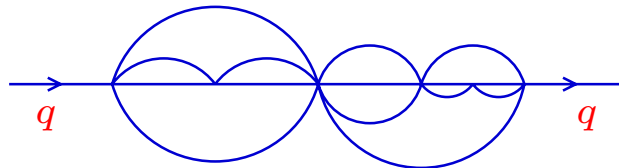
Consideriamo un arbitrario diagramma 1PI per la funzione a due punti $G(q^2, m^2)$, in una teoria con una sola specie di particelle di massa m^2 .

$$G(q^2, m^2) = \text{diagramma a due punti 1PI}$$

Teorema: le uniche singolarità del diagramma (e quindi di $G(q^2, m^2)$) sono le **soglie normali** $q^2 = n^2 m^2$, $n = 1, 2, \dots$

Dimostrazione:

- Le **soglie normali sono soluzioni** delle equazioni di Landau. Infatti per $q^2 > 0$ si può scegliere $q^\mu = (\sqrt{q^2}, 0)$. Il processo di Coleman–Norton è la creazione di $n > 1$ particelle **a riposo**, che restano nello stesso punto, interagendo fino a venire assorbite, per un tempo arbitrario. Un esempio per $n = 4$



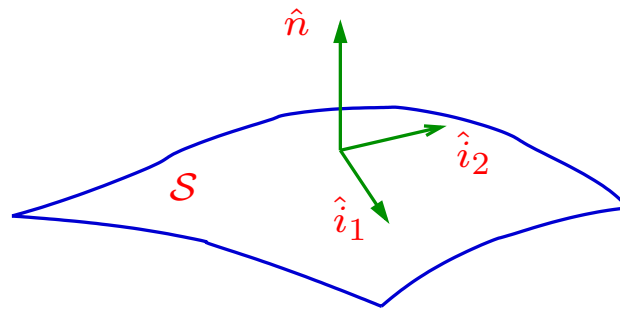
- Nessun altro diagramma** ridotto **soddisfa** Coleman–Norton. Se una delle particelle create ha **impulso non nullo** le altre coesistenti devono compensarlo muovendosi in direzione opposta. Una volta separate **non possono più rincontrarsi** in moto libero.

Power counting IR e C

Le equazioni di Landau sono solo **condizioni necessarie** per il verificarsi di divergenze IR e C. Se lo **spazio delle fasi** ha **dimensionalità sufficiente** la singolarità è **soppressa** (esempio: divergenze IR in ϕ_6^3).

Occorre sviluppare tecniche di **power counting**, analoghe a quelle UV, per stabilire la forza delle singolarità. Sommarariamente

- Dato un diagramma, tramite la rappresentazione di **CN** si individua una **superficie intrappolata** $\mathcal{S}$ nello spazio $\{k_i^\mu, y_i\}$.
- Per ogni $\mathcal{S}$, si individuano tra le $\{k_i^\mu\}$ **coordinate intrinseche** (movimento **in** $\mathcal{S}$) e **coordinate normali** (distanze **da** $\mathcal{S}$).



Esempio: per I_0 , $k \parallel p$, k^+ è intrinseca, $\{k^-, \mathbf{k}_\perp\}$ normali.

- Si introduce una **variabile di scaling** per determinare il peso relativo (volume di integrazione)/singolarità. Si pone $n_i = \lambda^{a_i} \hat{n}_i$ e si considera $\lambda \rightarrow 0$, $\hat{n}_i$ finiti.

Esempio: per I_0 , $k \parallel p$, $k^- \sim \lambda^2 \sqrt{q^2}$, $|\mathbf{k}_\perp|^2 \sim \lambda \sqrt{q^2}$.

- Si costruisce l'**integrale omogeneo** per $\mathcal{S}$, prendendo la potenza dominante di λ in ogni fattore del grafico

Esempio: per I_0 , $k \parallel p$, $I_0^{H,C1} = \int dk^- dk^+ d^2 k_\perp (k^- k^+)^{-1} k_\perp^{-2}$.

- Il **grado di divergenza** è determinato dalla potenza di λ associata all'integrale omogeneo. Per ogni linea, $l_i^2(p, k) - m_i^2 \rightarrow \lambda^{A_i} f(\hat{n})$, allora

$$n_S = \sum_i a_i - \sum_i A_i + n_{\text{num}} .$$

$n_S \leq 0$ segnala una divergenza, logaritmica se $n_S = 0$.

Applicazione: finitezza di $R_{e^+e^-}$

La **finitezza** a tutti gli ordini di $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$ segue dal suo legame con il correlatore di due correnti elettromagnetiche, dato dalla relazione di **unitarietà**

che **generalizza** $TT^\dagger = -i(T - T^\dagger)$. Posto allora

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}(q) &\equiv ie^2 \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T [J_\mu(x) J_\nu(0)] | 0 \rangle \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \pi(q^2) , \end{aligned}$$

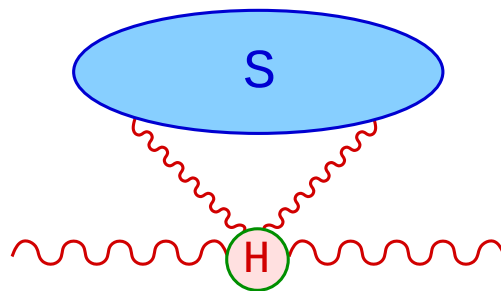
l'**unitarietà** fornisce

$$2 \text{Im} [\rho_{\mu\nu}(q)] = e^2 \sum_n \langle 0 | J_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(q - p_n) ,$$

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}) = \frac{e^2}{q^2} \text{Im} \left[\pi(q^2) \right] .$$

E' sufficiente allora dimostrare la finitezza di $\pi(q^2)$. Questa segue dalla rappresentazione di Coleman–Norton.

- Nel sistema in cui $q^\mu = (\sqrt{q^2}, \mathbf{0})$ si vede che non esistono **processi classici** con impulsi non nulli in cui il fotone **decade** e poi **si riaggrega**. Dunque non ci sono superfici intrappolate di impulso non nullo.
- Le **uniche** superfici intrappolate sono quelle date **solo** da particelle di quadrimpulso nullo, con diagramma ridotto



ma queste sono **finite** per **power counting**, come ci si può aspettare (le linee in **H** sono off-shell).

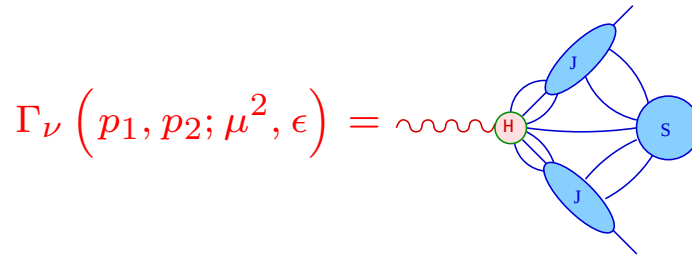
- Infatti, dato che le linee fermioniche a impulso nullo sono **meno singolari** di quelle gluoniche, la situazione peggiore si ha se **S** è costituito da **solì gluoni**. Ma allora, in **d** dimensioni, con **L_S** loops e **g_S** gluoni in **S**,

$$n_S = d L_S - 2g_S = 2(1 - \epsilon)g_S$$

che è positivo in **d > 2**.

Applicazione: il fattore di forma

Nel caso di $\Gamma(q^2)$ ci sono divergenze collineari associate ai quark osservati. Il più generale **diagramma ridotto** è



Sono possibili **ulteriori semplificazioni**

- **Gluoni** che connettano **S** direttamente ad **H** sono soppressi (un propagatore off-shell in più, l'effetto del nuovo propagatore soffice dominato dal nuovo loop soffice).
- **Linee fermioniche** che connettano i diversi sottografici (a parte i necessari q e $\bar{q}$) sono soppresse.
- In un gauge assiale, $n \cdot A = 0$, **solo** la linea del quark connette **J** a **H** (e così per l'antiquark). Infatti il propagatore del gluone è

$$G_{\mu\nu}^{\text{ax}}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{n \cdot k} - n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right) .$$

Contrazione con l'impulso del gluone **cancella** il denominatore

$$k^\mu G_{\mu\nu}^{\text{ax}}(k) = \frac{n_\nu}{n \cdot k} - n^2 \frac{k_\nu}{(n \cdot k)^2} ,$$

per cui il grado di singolarità IR e C è ridotto.

Queste considerazioni suggeriscono una **fattorizzazione** della forma $\Gamma = J_1 J_2 S H$, con correzioni $1/q^2$...

Cenni alla diagrammatica della fattorizzazione

Individuare le **regioni dominanti** nello spazio degli impulsi è solo il **primo passo** verso la fattorizzazione. Occorre poi

- **sfruttare** le semplificazioni dei diagrammi perturbativi nelle regioni dominanti (approssimazioni IR-C, identità di Ward).
- **organizzare** le sottrazioni a tutti gli ordini in modo da evitare **doppi conteggi** (le diverse funzioni fattore hanno definizioni operatoriali, in genere non locali).

Microesempio: ancora il fattore di forma a un loop, regione collineare $k \parallel p_1$, gauge di Feynman.

- **Cinematica:** $p_1^\mu = (p_1^+, 0, \mathbf{0}_\perp)$, $k^\mu = (k^+, k^-, \mathbf{k}_\perp)$, con $k^+ \gg \{k^-, \mathbf{k}_\perp\}$.
- Approssimazione di **Grammer-Yennie** al numeratore

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_1) \gamma_\sigma (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^\sigma v(p_2) &\rightarrow \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^- v(p_2) \\ &\rightarrow \frac{1}{k^+} \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) k^+ \gamma^- v(p_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{k \cdot \hat{u}_2} \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \not{k} v(p_2) . \end{aligned}$$

- **Identità di Ward:** $\not{k} = (\not{p}_2 + \not{k}) - \not{p}_2$. Si ottiene

$$\Gamma_\mu^{(\text{coll})} \propto \int d^d k \frac{\bar{u}(p_1) \not{p}_2 (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu v(p_2)}{k^2 (p_1 - k)^2 k \cdot u_2} .$$

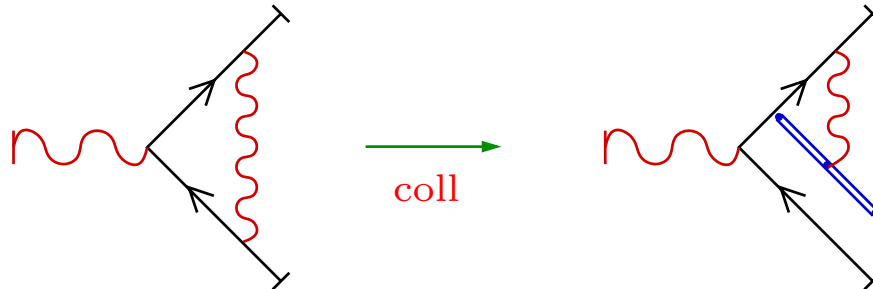
L'**accoppiamento** del gluone all'antiquark ne riconosce solo carica e direzione, **si eikonalizza**.

- **Linee eikonali**

Graficamente, si introducono **regole di Feynman** eikonali

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \alpha, a \\ \text{wavy line} \\ \text{blue line } j \rightarrow i \end{array} & = igu^\alpha t_{ij}^a & \begin{array}{c} \text{blue line } j \xrightarrow{p} i \end{array} = \frac{i\delta_{ij}}{p \cdot u + i\epsilon}
 \end{array}$$

in termini delle quali il calcolo precedente si legge



- **Più di un gluone**

Sommando su tutte le possibili inserzioni di due o più gluoni collineari, si hanno sistematiche **cancellazioni** da “identità di Ward”. Si usano poi **identità** del tipo

$$\frac{1}{k_1 \cdot u} \frac{1}{k_2 \cdot u} = \frac{1}{(k_1 + k_2) \cdot u} \frac{1}{k_1 \cdot u} + \frac{1}{(k_1 + k_2) \cdot u} \frac{1}{k_2 \cdot u} .$$

Tutti i gluoni collineari si accoppiano alla stessa linea eikonale.

- **Tipico risultato**

In un gauge assiale il fattore di forma si fattorizza

$$\Gamma \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) = J_1 \left(\frac{(p_1 \cdot n)^2}{\mu^2 n^2} \right) J_2 \left(\frac{(p_2 \cdot n)^2}{\mu^2 n^2} \right) \mathcal{S}(u_i \cdot n) H \left(\frac{q^2}{\mu^2} \right) .$$

Problemi a più scale e grandi logaritmi

Nei problemi con **una sola scala dura** i logaritmi sono risommati dal gruppo di **rinormalizzazione**

$$\sigma\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = \sigma\left(1, \alpha_s(q^2)\right) .$$

Nella maggior parte dei problemi si hanno tuttavia **più scale dure**. Nel caso in cui $q_1^2 \gg q_2^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$, l'affidabilità della teoria delle perturbazioni è messa **a rischio** da termini del tipo $\alpha_s^n \log^p(q_1^2/q_2^2)$, con $p = n$ (logaritmi **singoli**) o $p = 2n$ (logaritmi **doppi**). L'origine è sempre la **dinamica IR-C**. Alcuni **esempi**.

- Il **fattore di forma** (“di Sudakov”).

$$\Gamma\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \log^2\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) + \dots$$

In una teoria **massless** si pone $\mu^2 = q^2$, restano i poli IR-C. In presenza di masse si hanno **doppi** logaritmi $\log^2(q^2/m^2)$.

- **DIS**. Le due scale dure sono $Q^2 = -q^2$ e $W^2 = (p+q)^2 = Q^2(1-x)/x$. Ci sono **singoli** $\log(1/x)$, risommati dall'equazione di **BFKL**, e **doppi** $\log(1-x)$, risommati *à la* Sudakov.
- **Drell-Yan**. Il processo è $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-(q^2)$, le due scale sono $s = (p_1+p_2)^2$ e q^2 . I **doppi** $\log(1-q^2/s)$ sono risommati *à la* Sudakov.
- La distribuzione in **momento trasverso** in Drell-Yan. Le due scale sono q^2 e $q_\perp^2$, con **doppi** $\log(q_\perp^2/q^2)$, di Sudakov.

Fattorizzazione e risommazione

Esiste un profondo legame tra **fattorizzazione** e **risommazione**, come si vede già dal gruppo di **rinormalizzazione**.

$$G_0^{(n)}(p_i, \Lambda, g_0) = \prod_{i=1}^n Z_i^{1/2}(\Lambda/\mu, g(\mu)) G_R^{(n)}(p_i, \mu, g(\mu)) ,$$

$$\frac{dG_0^{(n)}}{d\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d \log G_R^{(n)}}{d \log \mu} = - \sum_{i=1}^n \gamma_i(g(\mu)) .$$

La soluzione di questa equazione consente di **risommare** in forma esponenziale la dipendenza (logaritmica) da μ .

L'equazione di **Altarelli–Parisi** analogamente permette di risommare (singoli) logaritmi di μ_F . In termini di momenti

$$\tilde{F}_2(N, Q^2, \alpha_s(Q^2)) = \tilde{C}\left(N, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(Q^2)\right) \tilde{f}\left(N, \frac{\mu_F^2}{m^2}, \alpha_s(Q^2)\right) ,$$
$$\frac{d\tilde{F}_2}{d\mu_F} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d \log \tilde{f}}{d \log \mu_F} = \gamma_N(\alpha_s(Q^2)) .$$

Nel caso di problemi con **doppi logaritmi** la fattorizzazione è più complicata, e occorre usare anche l'**invarianza di gauge**.

Il caso del fattore di forma

Consideriamo la fattorizzazione

$$\Gamma\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) = J_1\left(\frac{(p_1 \cdot n_1)^2}{\mu^2 n_1^2}\right) J_2\left(\frac{(p_2 \cdot n_2)^2}{\mu^2 n_2^2}\right) \mathcal{S}(u_i \cdot n_i) H\left(\frac{q^2}{\mu^2}, n_i\right) .$$

Il fattore di forma è **invariante di gauge**, dunque

$$\frac{\partial \log \Gamma}{\partial p_1 \cdot n_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial \log J_1}{\partial \log(p_1 \cdot n_1)} = -\frac{\partial \log H}{\partial \log(p_1 \cdot n_1)} - \frac{\partial \log \mathcal{S}}{\partial \log(u_1 \cdot n_1)} .$$

Le due funzioni dipendono da argomenti diversi. Si scrive allora

$$\frac{\partial \log J}{\partial \log q} = K_J \left(\alpha_s(\mu^2), \epsilon \right) + G_J \left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon \right) .$$

La funzione K contiene **tutte le singolarità** in ϵ (H è **finita** per $\epsilon \rightarrow 0$). La funzione G contiene **tutta** la dipendenza da q .

E' facile vedere che la dipendenza da q dell'**intero** fattore di forma è data da un'equazione di **forma identica**. Inoltre il fattore di forma è invariante per il **gruppo di rinormalizzazione**, dunque

$$\frac{dG}{d \log \mu} = -\frac{dK}{d \log \mu} = \gamma_K(\alpha_s(\mu)) ,$$

con una dimensione anomala finita e indipendente da q .

L'equazione per Γ può ora essere risolta. Dato che Γ è **divergente**, occorre mantenere la dipendenza da $\epsilon < 0$ **consistentemente**. $\alpha_s(\mu^2)$ diventa $\alpha_s(\mu^2, \epsilon)$ e si ha $\Gamma(q^2 = 0, \epsilon < 0) = 0$; allora

$$\Gamma \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon \right) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{-Q^2} \frac{d\xi^2}{\xi^2} \left[K \left(\epsilon, \alpha_s(\mu^2) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. G \left(-1, \bar{\alpha} \left(\frac{\xi^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon \right), \epsilon \right) + \frac{1}{2} \int_{\xi^2}^{\mu^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} \gamma_K \left(\bar{\alpha} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon \right) \right) \right] \right\} .$$

L'esponenziazione è **non banale**, l'esponente ha solo **poli singoli** in ϵ della forma $\alpha_s^n / \epsilon^{n+1}$.

IL caso del thrust

La distribuzione di thrust ha **singolarità** del tipo $\alpha_s^n \log^{2n-1}(1 - T)/(1 - T)$, che possono essere **risommate** con metodi analoghi.

Nel limite $T \rightarrow 1$ la distribuzione può essere **fattorizzata** come Γ . Le funzioni J ora entrano nello **stato finale**, per cui hanno una **massa** invariante $m_J^2 \neq 0$, $m_J^2 \propto (1 - T)$ per $T \rightarrow 1$.

$$\sigma(N) \equiv \frac{1}{\sigma_0} \int_0^1 dT T^N \frac{d\sigma}{dT} = \hat{J}_1 \left(\frac{q^2}{N\mu^2}, \frac{(p_1 \cdot n)^2}{n^2\mu^2} \right) \hat{J}_2 \hat{S} \hat{H} .$$

In un gauge assiale, i **logaritmi leading** sono contenuti nelle funzioni J , che obbediscono una equazione del tipo noto.

$$\frac{\partial \log \hat{J}}{\partial \log q} = \hat{K}_J \left(\frac{q^2}{N\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) + \hat{G}_J \left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) .$$

Si esprime $\hat{J}(N)$ in funzione di $\hat{J}(1)$ e di $\alpha_s(\mu^2/N)$, come

$$\hat{J}(\mu^2) = \hat{J}\left(\frac{\mu^2}{N}\right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{q^2/N}^{q^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} \left(\log \frac{\mu}{\lambda} \Gamma_{\hat{J}}(\alpha_s(\lambda^2)) - \Gamma'_{\hat{J}}(\alpha_s(\lambda^2)) \right) \right] .$$

I **logaritmi leading** sono determinati da $\Gamma_{\hat{J}} = \gamma_K + \dots = 2C_F\alpha_s/\pi + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$. **Trascurando** gli effetti di **running coupling** si trova $\hat{J} \sim \exp(\log^2 N)$. L'antitrasformata di Mellin è

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} = -2C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\log(1 - T)}{1 - T} \exp \left[-C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \log^2(1 - T) \right] .$$

Nota: $d\sigma/dT \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 1$ (“soppressione di Sudakov”).

Ai confini della teoria perturbativa

Le risommazioni **saggiano i limiti** della teoria perturbativa. Si ottengono infatti integrali della forma

$$f_a(q^2) = \int_0^{q^2} \frac{dk^2}{k^2} (k^2)^a \alpha_s(k^2) ,$$

Si osserva esplicitamente la **non-convergenza** della teoria delle perturbazioni a ordini elevati, effetto del **polo di Landau**. Infatti

$$\alpha_s(k^2) = \frac{\alpha_s(q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(q^2) \log(k^2/q^2)} .$$

Posto $z \equiv \log q^2/k^2$, si osserva che

- La serie perturbativa in potenze di $\alpha_s(q^2)$ **diverge**.

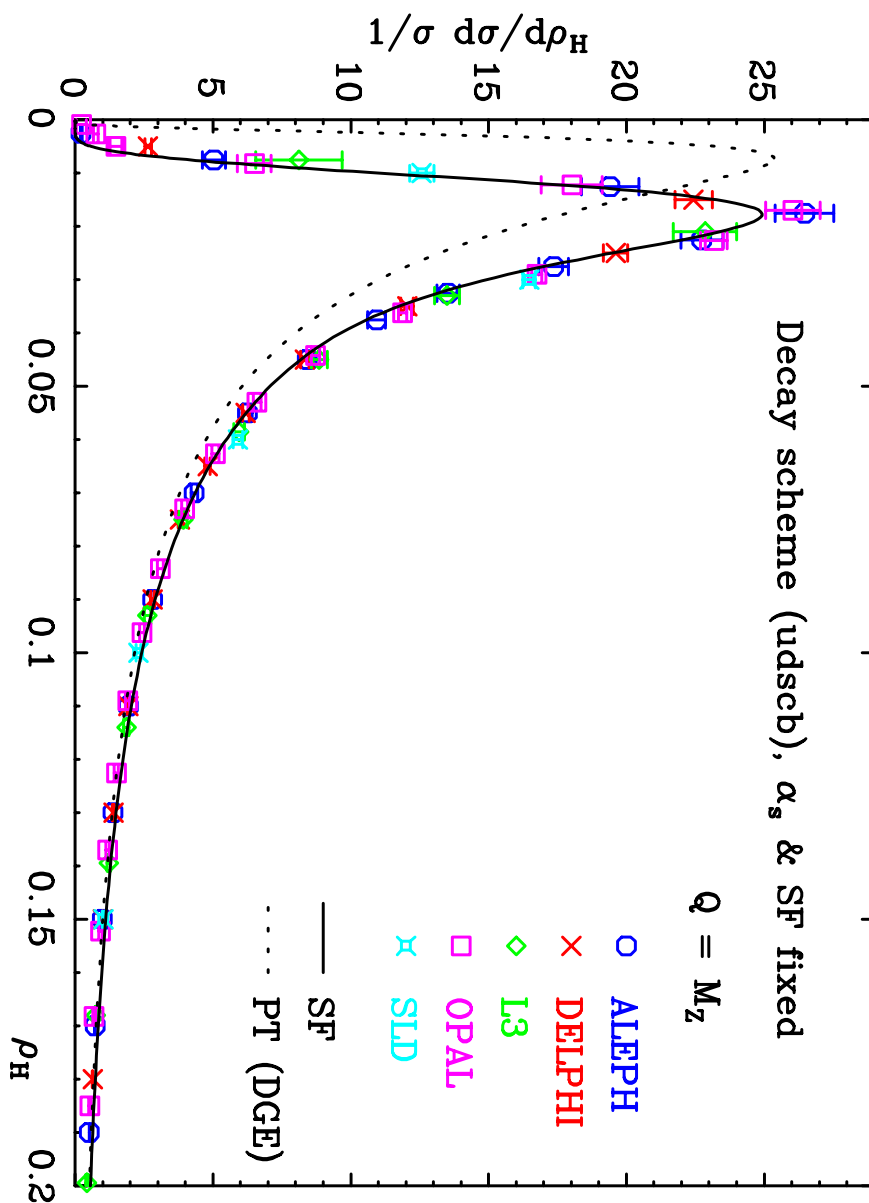
$$f_a(q^2) = (q^2)^a \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^n \alpha_s^{n+1}(q^2) \int_0^{\infty} dz e^{-az} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_s^n n! .$$

- Il risultato è **ambiguo**, ma l'ambiguità è **soppressa** da potenze di q^2 . Infatti

$$f_a(q^2) = (q^2)^a \alpha_s(q^2) \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-az}}{1 - \beta_0 \alpha_s(q^2) z} .$$

Il polo di Landau sul cammino di integrazione induce una ambiguità dell'ordine del residuo

$$\left| \delta f_a(q^2) \right| \propto \exp \left[-\frac{a}{\beta_0 \alpha_s(q^2)} \right] = \left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{q^2} \right)^a .$$



Un esempio recente di dati e predizioni teoriche. Il grafico presenta la distribuzione della **heavy jet mass** nei dati sperimentali di **LEP** a $q^2 = M_Z^2$, confrontata con un calcolo teorico risommato e con due diversi modi di migliorare la previsione teorica includendo contributi soppressi di ordine $1/Q$ (da un lavoro di E. Gardi e J. Rathsmann, [hep-ph/0201019](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0201019)).