

Introduzione alla QCD perturbativa I

Massimiliano Grazzini
(Firenze)

SNFT2002, Parma, Settembre 2002

- Elementi di base
- Modello a partoni
- OPE e applicazione al DIS
- Divergenze infrarosse e loro cancellazione
- Il teorema di fattorizzazione collineare
- Equazioni di Altarelli-Parisi

Elementi di base

QCD $\leftrightarrow$ Quantum-Chromo-Dynamics



Teoria quantistica del colore

È una teoria di gauge non abeliana con gruppo di gauge $SU(N_c)$

La teoria è completamente specificata assegnando il numero quantico di colore N_c

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f^i \left[i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m_f \delta_{ij} \right] \psi_f^j$$

- $(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - i g t_{ij}^a A_\mu^a$

Derivata covariante $i, j = 1 \dots N_c$

- $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

Tensore di campo del gluone

Fino a qui completa analogia con QED ma il gluone A_μ^a porta carica di colore $a \Rightarrow$ mentre i fotoni sono neutri i gluoni sono **carichi**

- Come in QED i fermioni irradiano
- In QCD anche i gluoni irradiano e interagiscono tra di loro

Dividiamo $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}$

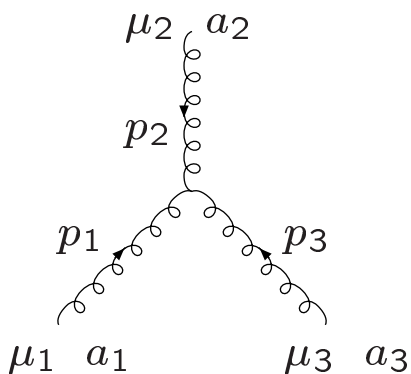
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int} = & \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f^i \gamma^\mu t_{ij}^a A_\mu^a \psi_f^i \quad \text{vertice } q\bar{q}g \\
 & - g f^{abc} \partial^\mu A_\nu^a A_\mu^b A^{\nu c} \quad \text{vertice } ggg \\
 & - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} \quad \text{vertice } gggg
 \end{aligned}$$

Regole di Feynman

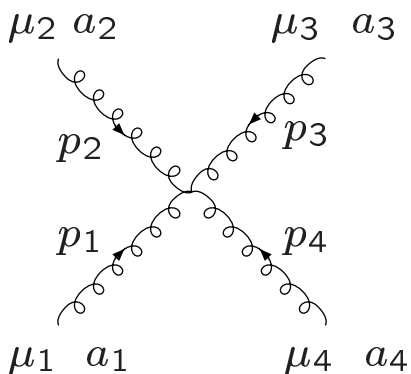
$$\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ j \end{array} \quad \frac{i(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\epsilon} \delta^{ij}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ a \end{array} \text{---} \begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \nu \\ b \end{array} \quad \frac{i}{p^2+i\epsilon} d^{\mu\nu}(p) \delta^{ab}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ i \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} g \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ j \end{array} \quad -ig(t^a)_{ij}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$



$$\begin{aligned} & -gf^{a_1a_2a_3} \left[g^{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)^{\mu_3} \right. \\ & \quad + g^{\mu_2\mu_3}(p_2 - p_3)^{\mu_1} \\ & \quad \left. + g^{\mu_3\mu_1}(p_3 - p_1)^{\mu_2} \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & -ig^2 \left[f^{ba_1a_2} f^{ba_3a_4} (g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}) \right. \\ & \quad \left. + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \right]
 \end{aligned}$$

Il tensore di polarizzazione $d^{\mu\nu}(p)$ è definito da una somma sulle polarizzazioni

$$d^{\mu\nu}(p) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{(\lambda)}^{\mu}(p) \varepsilon_{(\lambda)}^{\nu}(p)$$

e dipende dalla scelta della gauge

$$d^{\mu\nu}(p) = \begin{cases} -g^{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{p^2 + i\epsilon} & \text{gauge covarianti} \\ -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu} n^{\nu} + p^{\nu} n^{\mu}}{p \cdot n} - n^2 \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{(p \cdot n)^2} & \text{gauge assiali} \end{cases}$$

Nelle gauge covarianti bisogna includere i **ghost**

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array} \quad \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \Rightarrow \text{Propaga come uno scalare ma} \\
 \text{si comporta come un fermione}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \end{array} \quad g f^{abc} p^{\mu} \Rightarrow \text{In QED disaccoppia}$$

- Gauge covarianti

Tutto il campo A_μ propaga (polarizzazioni fisiche e non fisiche)

Introducono però campi **non fisici** il cui contributo cancella quello delle polarizzazioni non fisiche del gluone

Vantaggi: mantengono la covarianza di Lorentz anche negli step intermedi

Svantaggi: introduzione dei Ghost

- Gauge fisiche

Selezionano solo due polarizzazioni trasverse $n_\mu A^\mu = 0$ dove n è un 4-vettore arbitrario

Vantaggi: Niente ghost, pittura fisica più chiara

Svantaggi: Si perde la covarianza esplicita, inoltre ci sono problemi per calcoli di loop

In pratica:

È questione di gusti: per calcoli all'ordine più basso o approssimati le gauge fisiche semplificano le cose

Algebra di colore

Il calcolo dei diagrammi di Feynman è simile alla QED a parte tener conto del fattore di colore. La forma esplicita delle matrici di colore non è importante nei casi pratici.

$$(T^a)_{ij} = t^a_{ij} \text{ fondamentale}$$

$$(T^a)_{bc} = if_{abc} \text{ aggiunta}$$

Formule ricorrenti:

$$Tr(t^a t^b) = T_R \delta_{ab} \quad T_R = \frac{1}{2} \text{ normalizzazione}$$

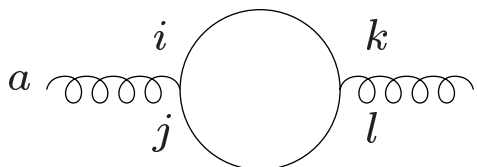
$$(t^a t^a)_{ij} = C_F \delta_{ij} \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$$

$$f^{abc} f^{abd} = C_A \delta^{cd} \quad C_A = N_c$$

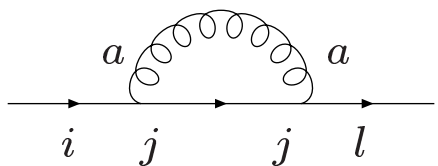
inoltre

$$Tr(T^a) = 0$$

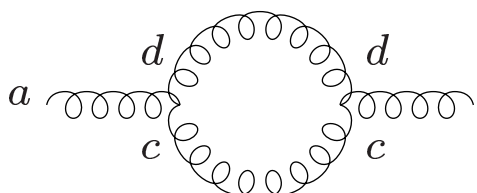
$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$$



$$= Tr(t^a t^b) = T_R \delta_{ab}$$



$$= t^a_{ij} t^a_{jl} = C_F \delta_{il}$$

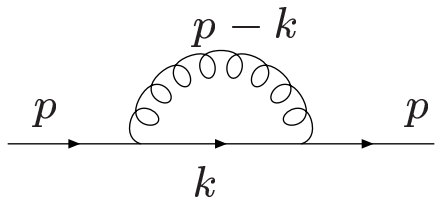


$$= f^{adc} f^{bdc} = C_A \delta^{ab}$$

Rinormalizzazione e running coupling

QCD è una teoria di gauge

- non abeliana
- rinormalizzabile



The diagram shows a horizontal line representing a quark with momentum p entering from the left and exiting to the right. A gluon loop is attached to this line. The loop is a semi-circle with two vertices. The momentum of the incoming quark is p , the momentum of the outgoing quark is p , and the momentum of the gluon in the loop is k . The momentum of the gluon entering the loop is $p - k$.

$$\sim g^2 \int_{p^2}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} \rightarrow \infty$$

Le singolarità UV vengono rimosse dalla procedura di rinormalizzazione

Quantità nude $g_B (m_B) \longrightarrow$ Quantità rinormalizzate $g (m)$

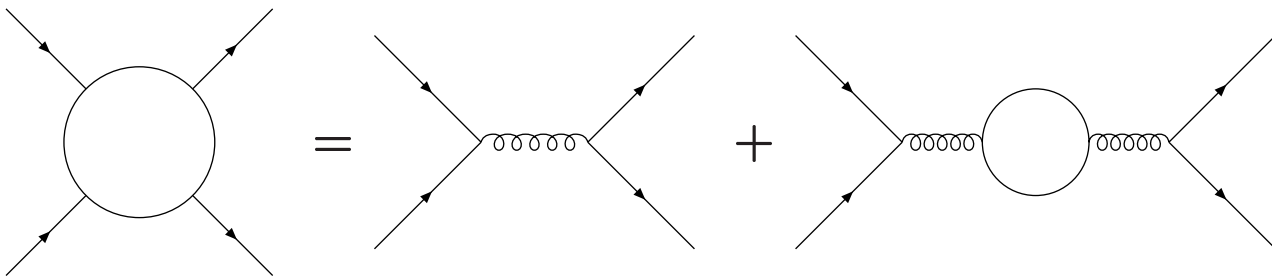
Le quantità nude sono parametri arbitrari della lagrangiana

Le quantità rinormalizzate sono quelle che hanno significato fisico

Nel seguito definiremo come in QED $\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi}$

La rinormalizzazione si articola in due fasi

- **Regolarizzazione** $\Rightarrow$ Permette di definire l'integrale di loop
- **Sottrazione** $\Rightarrow$ Ridefinisce α_B



$$\begin{aligned}
 &\sim \alpha_B \left\{ 1 + \alpha_B \beta_0 \int_{p^2}^{\Lambda_{cut}^2} \frac{d^4 k}{(k^2)^2} + \mathcal{O}(\alpha_B^2) \right\} \\
 &\sim \alpha_B \left\{ 1 + \alpha_B \beta_0 \left(\log \frac{\Lambda_{cut}^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu^2}{p^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha_B^2) \right\} \\
 &\sim \alpha(\mu^2) \left\{ 1 + \beta_0 \alpha(\mu^2) \log \frac{\mu^2}{p^2} + \mathcal{O}(\alpha_B^2) \right\}
 \end{aligned}$$

dove

$$\alpha(\mu^2) \equiv \alpha_B \left(1 + \beta_0 \alpha_B \log \frac{\Lambda_{cut}^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_B^2) \right)$$

β_0 è il coefficiente del comportamento ultravioletto

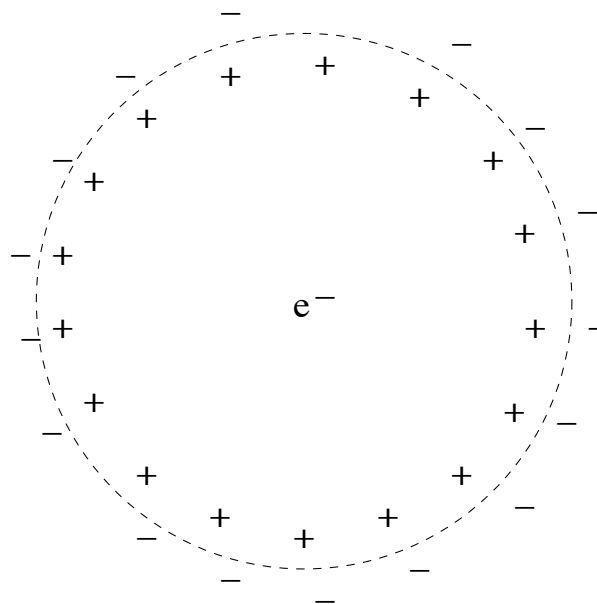
A causa dell'invarianza di gauge i termini divergenti hanno la stessa struttura di quelli presenti nella lagrangiana e possono essere riassorbiti nelle quantità nude

La teoria può essere consistentemente definita ad ogni ordine perturbativo introducendo un accoppiamento $\alpha_S(\mu^2)$ dipendente dalla scala di rinormalizzazione μ

In QED l'andamento dell'accoppiamento con la scala ha una semplice interpretazione fisica

Il vuoto attorno ad una carica puntiforme si polarizza a causa dell'emissione di coppie e^+e^- dando un effetto di screening

⇒ L'accoppiamento effettivo diminuisce a grande distanza



La teoria non predice il valore dell'accoppiamento α_S ma la sua dipendenza dalla scala

$$\alpha(\mu^2) \equiv \alpha_B \left(1 + \beta_0 \alpha_B \log \frac{\Lambda_{cut}^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha_B^2) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_S(\mu^2)}{d \log \mu^2} = -\beta_0 \alpha_S^2(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_S^3)$$

È una delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione



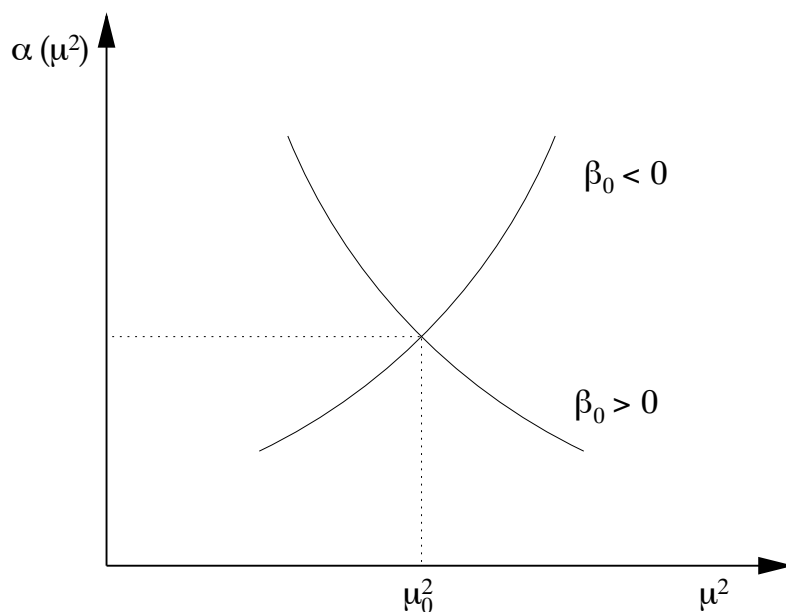
A tutti gli ordini diventa

$$\frac{d\alpha_S(\mu^2)}{d \log \mu^2} = \beta(\alpha_S(\mu^2))$$

prevede l'andamento di α_S dato $\alpha_S(\mu_0^2)$

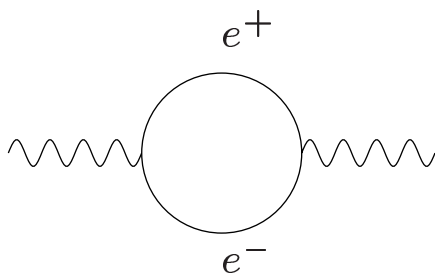
La funzione $\beta(\alpha) = -\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n-1} \alpha^n$ è una caratteristica della teoria

Se per una certa scala μ_0^2 si ha $\alpha_S(\mu_0^2) \ll 1 \Rightarrow$ si può dare una soluzione perturbativa dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione



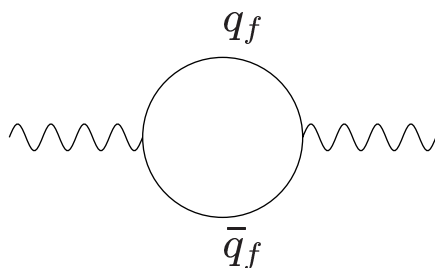
Il calcolo effettivo dà:

QED

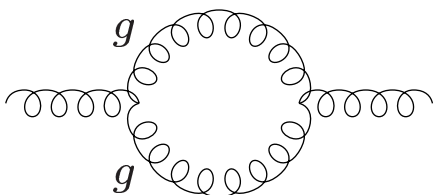


$$\beta_0 = -\frac{1}{3\pi} < 0$$

QCD



$$\beta_0^{quark} = -\frac{1}{3\pi} T_R N_F < 0$$



$$\beta_0^{gluon} = \frac{11}{12\pi} C_A \text{ positivo !}$$

Intuitivamente: i gluoni sono carichi, e diffondono la carica di colore su distanze maggiori $\Rightarrow$ effetto di anti-screening

- In QED $\beta_0 < 0$ l'accoppiamento aumenta a corte distanze
- In QCD $\beta_0 = \frac{11N_c - 2N_F}{12\pi} > 0$ se $N_F < 16$

$\Rightarrow$ l'accoppiamento diminuisce a corte distanze:

LIBERTÀ ASINTOTICA



In processi con grossi momenti trasferiti possiamo usare la teoria delle perturbazioni anche se non abbiamo risolto la teoria

Il parametro Λ_{QCD}

La soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione per α_S è

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{\alpha_S(\mu_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha_S(\mu_0^2) \log \mu^2 / \mu_0^2} (1 + \mathcal{O}(\alpha_S(\mu_0^2)))$$

Dà il valore di α_S ad una certa scala μ^2 noto α_S alla scala di riferimento μ_0^2

NOTA: Poichè una delle migliori misure di α_S si ha alla massa della Z_0 si usa dare come valore di riferimento $\alpha_S(M_Z^2)$

Come alternativa si può scegliere di dare α_S in termini di una scala di riferimento Λ_{QCD}

$$\Lambda_{QCD} = \mu_0 \exp \left[- \frac{1}{2\beta_0 \alpha_S(\mu_0^2)} \right]$$

$$\Rightarrow \alpha_S(\mu^2) = \frac{1}{\beta_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \left[1 + \mathcal{O} \left(1 / \log(\mu^2 / \Lambda_{QCD}^2) \right) \right]$$

Attualmente $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV

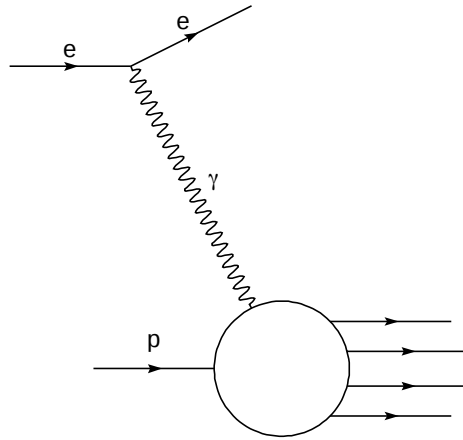
La scala Λ_{QCD} segnala la regione dove l'interazione diventa realmente FORTE

$\Rightarrow$ Per $Q \sim \Lambda_{QCD}$ occorrerebbe una comprensione degli effetti non perturbativi

Deep Inelastic Scattering

Consideriamo il processo $e^- p \rightarrow e^- X$ nella regione $Q^2 = -q^2 = (k - k')^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$

Questa regione è detta **altamente anelastica** e se $Q^2 < M_Z^2$ il processo è dominato dallo scambio di un fotone



Variabili cinematiche

$$q = k - k' \quad Q^2 = -q^2 \quad p^2 = M^2 \quad x = \frac{Q^2}{2pq} \quad y = \frac{pq}{pk}$$

NB: $s = (p + q)^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

Per la sezione d'urto sommata sulle polarizzazioni si può scrivere

$$k'_0 \frac{d\sigma}{d^3k'} = \frac{1}{kp} \left(\frac{\alpha}{q^2} \right)^2 L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

dove $\alpha = e^2/4\pi$ e

- $L^{\mu\nu}$ tensore leptonico
- $W_{\mu\nu}$ tensore adronico

$L^{\mu\nu}$ è completamente calcolabile

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \text{Tr}[\not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu] \\ &= k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + (q^2/2) g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

mentre

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p - q) \frac{1}{2} \sum_\lambda \langle p\lambda | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | p\lambda \rangle$$

Usando la completezza e l'invarianza traslazionale si ha

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p | J_\mu(y) J_\nu(0) | p \rangle$$

dove si è sottintesa la media sulle polarizzazioni del protone.

⇒ La sezione d'urto per il processo è legata al valore di aspettazione sullo stato di protone del prodotto $J_\mu(y) J_\nu(0)$

Consideriamo il tensore

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4y e^{iqy} \langle p | T J_\mu(y) J_\nu(0) | p \rangle$$

Il teorema ottico ci permette di esprimere $W_{\mu\nu}$ come la parte assorbitiva di $T_{\mu\nu}$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \text{Abs } T_{\mu\nu}$$

dove

$$\text{Abs } T_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [T_{\mu\nu}(s + i\epsilon) - T_{\mu\nu}(s - i\epsilon)]$$

La forma più generale di $W_{\mu\nu}$ compatibile con i requisiti di conservazione della corrente, invarianza per parità e ermiticità è

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= F_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \\ &+ F_2 \frac{1}{pq} \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu \right) \end{aligned}$$

Le funzioni F_1 e F_2 sono dette funzioni di struttura del protone

Sono funzioni scalari adimensionali di p e q

Di solito si sottintende la dipendenza da M_p e si indicano con $F_i(x, Q^2)$

Alternativamente si può usare F_2 e $F_L = F_2 - 2xF_1$ ($F_2 = F_T + F_L$)

F_L e F_T sono connesse con lo scattering da fotoni longitudinali o trasversi

Modello a partoni

Il fotone virtuale agisce da **sonda** per la struttura del protone

Fin dagli esperimenti di SLAC-MIT (1972) è apparso chiaro che nel **limite di Bjorken** definito da $Q^2 \rightarrow \infty$ e x finito le funzioni di struttura obbediscono approssimativamente alla proprietà di scaling

$$F_i(x, Q^2) \sim F_i(x)$$

La proprietà di scaling implica che il fotone virtuale diffonde su **costituenti puntiformi** del protone

Altrimenti F_i dovrebbe dipendere dal rapporto Q^2/Q_0^2 con Q_0^2 la scala caratteristica dei costituenti

MODELLO A PARTONI $\Rightarrow$ Il protone si comporta come una collezione di partoni debolmente interagenti tra loro

Il tempo caratteristico dell'interazione tra i partoni risulta dilatato e molto maggiore del tempo di interazione con il fotone

Se la probabilità di estrarre un partone dall'adrone con frazione d'impulso ξ è $f_0(\xi)$ la sezione d'urto sarà:

$$\sigma \sim \int d\xi f_0(\xi) \hat{\sigma}(\xi p + q)$$



**PRIMA IDEA DI FATTORIZZAZIONE TRA
FISICA DI PICCOLE E GRANDI DISTANZE**

Il modello a partoni fu introdotto molto prima di QCD (Feynman, Bjorken...) e la sua “giustificazione” a posteriori sta nella libertà asintotica

Operator Product Expansion

Il prodotto di due operatori locali $A(x)B(y)$ è singolare quando $x - y \rightarrow 0$

La struttura della singolarità ha la forma

$$TA(x)B(y) = \sum_k C_k(x-y)O_k\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dove O_k sono operatori locali e C_k sono funzioni coefficiente che contengono la singolarità

L'OPE fu proposto da Wilson nel 1969 e una dimostrazione in teoria delle perturbazioni fu data da Zimmermann nel 1971

Si ritiene che la validità dell'OPE vada oltre il regime perturbativo

Noi saremo interessati al caso in cui A e B sono la stessa corrente locale J

Poichè QCD è piuttosto complicata lavoreremo talvolta in un modello molto più semplice ma che ne mantiene alcune proprietà, ϕ^3 in $d=6$ dimensioni: $(\phi^3)_6$

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{3!}\lambda\phi^3$$

- In $d=6$ la teoria è rinormalizzabile
- Esiste un solo accoppiamento trilineare (simula $q\bar{q}g$)

Per la corrente J possiamo scegliere l'operatore $J = \frac{1}{2}\phi^2$

In realtà dell'OPE si dà una dimostrazione in senso debole, ossia la

$$TJ(x)J(0) = \sum_k C_k(x)O_k(0) \quad x \rightarrow 0$$

significa

$$\langle 0|TJ(x)J(0)\phi(x_1)..\phi(x_n)|0\rangle = \sum_k C_k(x)\langle 0|TO_k(0)\phi(x_1)..\phi(x_n)|0\rangle$$

Oppure nello spazio degli impulsi

$$G(q, p_1, \dots p_n) = \sum_k C_k(q)E_k(p_1, \dots p_n) \quad q \rightarrow \infty$$

dove

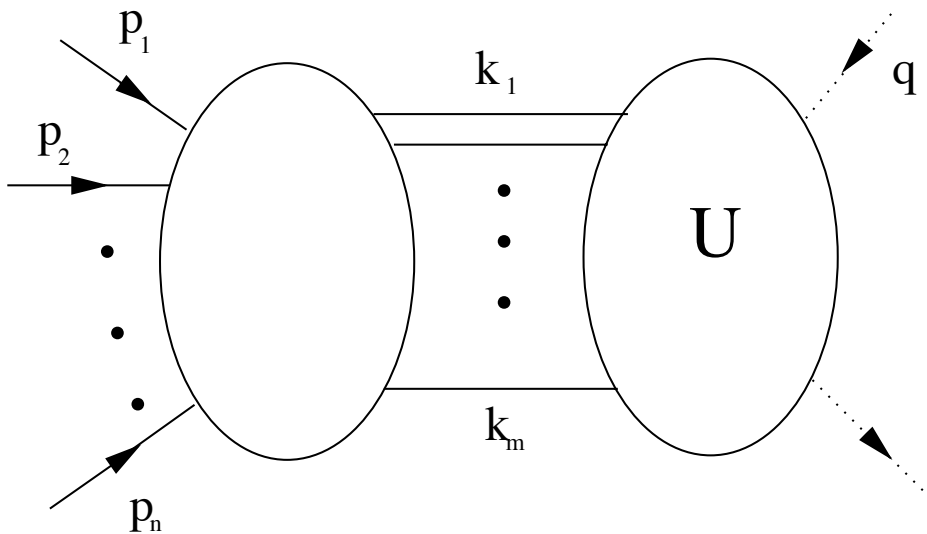
$$G(q, p_1, \dots, p_n) = \int d^6x d^6x_1 \dots d^6x_n e^{iqx} e^{i(p_1x_1 + \dots p_nx_n)} \\ \times \langle 0|TJ(x)J(0)\phi(x_1)..\phi(x_n)|0\rangle \Delta^{-1}(p_1) \dots \Delta^{-1}(p_n)$$

$$C_k(q) = \int d^6x e^{iqx} C_k(x)$$

$$E_k(p_1, \dots, p_n) = \int d^6x_1 \dots d^6x_n e^{i(p_1x_1 + \dots p_nx_n)} \\ \times \langle 0|TO_k(0)\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle \Delta^{-1}(p_1) \dots \Delta^{-1}(p_n)$$

OPE: interpretazione

Consideriamo un generico grafico che contribuisce a $G(q, p_1 \dots p_n)$



Consideriamo una regione nello spazio degli impulsi di integrazione nella quale i momenti di ordine q sono limitati al sottografico U

Essendo tutti gli impulsi in U di ordine q si può trascurare la dipendenza dagli impulsi k_i in U . L'andamento in q del sottografico è dettato dalla sua dimensione, che è $2d_J - 2m - 6 = 2 - 2m$.

⇒ Si otterrà un contributo dominante dai grafici U con m minimo, cioè due

Per quanto riguarda il resto del grafico, è come se U fosse ridotto ad un punto nel quale vanno a finire due linee, ossia il resto del grafico dà la funzione di Green con inserzione dell'operatore ϕ^2

OPE: applicazione al DIS

La sezione d'urto nel DIS è legata alla parte assorbitiva del tensore

$$T_{\mu\nu} = i \int d^4y e^{iqy} \langle p | T J_\mu(y) J_\nu(0) | p \rangle$$

per grandi valori di Q^2 e x finito

Vogliamo usare l'OPE per studiare il limite altamente anelastico

Osserviamo però che nel DIS

$$Q^2 \rightarrow \infty \quad Q^2/2pq \sim \text{costante}$$

mentre nel limite di corte distanze o di grandi q_μ si ha $Q^2 \rightarrow \infty$ ma anche $x \rightarrow \infty$ il che è evidentemente un limite non fisico per il DIS

È però possibile ottenere informazioni sul DIS dall'OPE in modo indiretto.

Per semplificare le notazioni lavoreremo per ora nel caso in cui la corrente J_μ sia sostituita da un operatore hermitiano scalare J

Al posto di $W_{\mu\nu}$ avremo pertanto una sola funzione di struttura

$$W(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p | J(y) J(0) | p \rangle$$

mentre l'ampiezza in avanti è

$$T(\omega, Q^2) = \frac{1}{2\pi} \int d^4y e^{iqy} \langle p | T J(y) J(0) | p \rangle \quad \omega = 1/x$$

L'OPE ci dice che

$$TJ(y)J(0) = \sum_k C_k(y)O_k(0)$$

L'indice k è un indice collettivo che include anche la sommatoria sugli indici di Lorentz, perciò l'equazione precedente si può riscrivere nella forma

$$TJ(y)J(0) = \sum_{i,n} C_{n,i}(y^2)y^{\mu_1}...y^{\mu_n}O_{\mu_1...\mu_n}^i(0)$$

Sostituendo nella definizione di $T(\omega, Q^2)$ si ottiene

$$\begin{aligned} T(\omega, Q^2) &= \int d^4y e^{iqy} \langle p | TJ(y)J(0) | p \rangle \\ &= \sum_{i,n} \langle p | O_{\mu_1...\mu_n}^i(0) | p \rangle \int d^4y y^{\mu_1}...y^{\mu_n} C_{i,n}(y^2) e^{iqy} \\ &= \sum_{i,n} \langle p | O_{\mu_1...\mu_n}^i(0) | p \rangle C_{i,n}(Q^2) \left(\frac{Q^2}{2}\right)^{-n} q^{\mu_1}...q^{\mu_n} \end{aligned}$$

dove il fattore $(Q^2/2)^{-n}$ nella definizione dei $C_{i,n}(Q^2)$ è stato aggiunto per convenienza.

L'elemento di matrice dell'operatore locale $O_{\mu_1...\mu_n}^i(0)$ si può riscrivere nella forma

$$\langle p | O_{\mu_1...\mu_n}^i(0) | p \rangle = A_{n,i} p_{\mu_1}...p_{\mu_n} + \text{termini in } g_{\mu_\alpha\mu_\beta}$$

Sostituendo i termini in $g_{\mu_\alpha\mu_\beta}$ danno contributi soppressi per potenze di M^2/Q^2 a ω fisso e perciò si possono trascurare

Si trova quindi

$$T(\omega, Q^2) = \sum_{i,n} A_{i,n} C_{i,n}(Q^2) \omega^n \quad (1)$$

⇒ L'OPE dà informazione su $T(\omega, Q^2)$ sotto forma di una serie di potenze in ω nell'intorno dell'origine, in accordo con il fatto che la regione di grandi q_μ equivale alla regione $\omega = 1/x \sim 0$

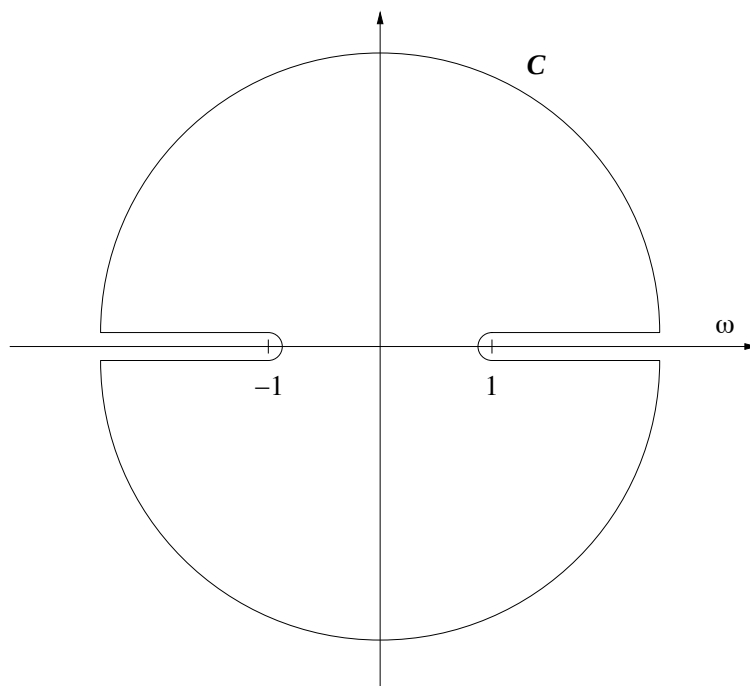
Occorre convertire questa informazione in una regione non fisica in una predizione fisica per il DIS

Ciò è possibile utilizzando una relazione di dispersione

Infatti la funzione $T(\omega, Q^2)$ sviluppa un taglio per $s \geq 0$ ossia per $\omega \geq 1$.

Inoltre per invarianza di *crossing* si ha

$$T(-\omega, Q^2) = T(\omega, Q^2)$$



Perciò integrando nel piano complesso ω sul contorno C in figura si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{T(\omega, Q^2)}{\omega^n} &= \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n} \text{Abs } T(\omega, Q^2) \\ &= 2 \int_0^1 dx x^{n-2} W(x, Q^2) \end{aligned}$$

Utilizzando la (1) si ottiene infine

$$2W_n(Q^2) = \sum_i A_{n,i} C_{n,i}(Q^2) \quad (2)$$

dove per una generica funzione $f(x)$ si è definita la trasformata di Mellin

$$f_n = \int_0^1 dx x^{n-1} f(x)$$

Osserviamo ora che da una semplice analisi dimensionale l'andamento con Q^2 dei coefficienti è a meno di correzioni logaritmiche

$$C_{n,i}(Q^2) \sim \frac{1}{(Q^2)^{\tau_n^i/2 - d_J + d/2}}$$

dove $\tau_n^i = d_n^i - n$ è il *twist* dell'operatore $O_{i,n}$ e d_J è la dimensione della corrente

⇒ Poichè gli $A_{n,i}$ dipendono solo dalla massa del protone, il termine dominante viene dagli operatori di *twist* più basso



I momenti di Mellin della funzione di struttura fattorizzano in una parte non perturbativa legata a valori di aspettazione di operatori locali per una parte calcolabile perturbativamente. La prima è indipendente dalla corrente ma dipende solo dalla teoria, mentre la seconda dipende dal tipo di corrente considerato

- In **QCD** $d_J = 3$ mentre il twist minimo è 2 ⇒ $C_n \sim (Q^2)^0$ a leading twist
- In $(\phi^3)_6$ $d_J = 4$ mentre il twist minimo è 4 ⇒ $C_n \sim 1/Q^2$ a leading twist

Leading twist ⇔ modello a partoni

I coefficienti di Wilson $C_{n,i}(Q^2)$ obbediscono all'equazione del gruppo di rinormalizzazione

$$(\mathcal{D} + 2\gamma_J - \gamma_k) C_k(q) = 0$$

dove

- $\mathcal{D} = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha}$
- γ_J è la dimensione anomala della corrente J
- γ_k è la dimensione anomala dell'operatore locale O_k

NB Se la corrente è conservata $\gamma_J = 0$

$$\Rightarrow (\mathcal{D} - \gamma_k) C_k(q) = 0$$

La soluzione dell'equazione è

$$C_n^i(Q^2) = C_n^i(Q^2/\mu^2, \alpha_S) = \left[e^{\int_{\alpha_S}^{\alpha_S(Q^2)} d\alpha \frac{\gamma_n(\alpha)}{\beta(\alpha)}} \right]_{ij} C_n^i(1, \alpha_S(Q^2))$$

dove in generale γ_n è una matrice e l'esponenziale si intende ordinato

Se scegliamo una funzione di struttura di non singoletto, per esempio $F^{NS}(x, Q^2) = F_{2p}(x, Q^2) - F_{2n}(x, Q^2)$ si può scrivere

$$2F_n^{NS}(Q^2) = A_n^{NS} C_n^{NS}(Q^2) = f_n^{NS}(Q^2) C_n^{NS}(1, \alpha_S(Q^2))$$

dove si sono definiti i momenti della densità partonica di non singoletto come

$$f_n^{NS}(Q^2) = A_n^{NS} \left[e^{\int_{\alpha_S}^{\alpha_S(Q^2)} d\alpha \frac{\gamma_n^{NS}(\alpha)}{\beta(\alpha)}} \right]$$

È immediato verificare che

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_n^{NS}(Q^2) = \gamma_n^{NS}(\alpha_S(Q^2)) f_n^{NS}(Q^2)$$

$\Rightarrow$ **Evoluzione secondo il gruppo di rinormalizzazione**

Divergenze infrarosse

Possono originare in una teoria con particelle di massa nulla (QED, QCD) e sono di due tipi:

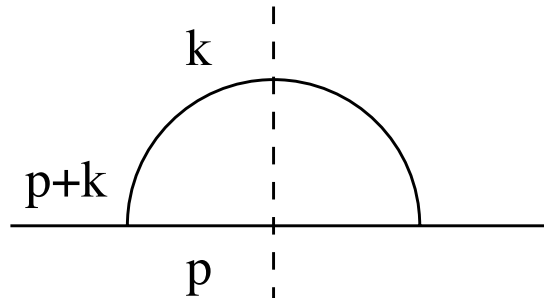
- **Soffice**

Il quadrimpulso di una delle particelle si annulla: $p_i^\mu \rightarrow 0$
(Per esempio QED e QCD dove fotone e gluone sono a massa nulla)

- **Collineare**

Gli impulsi di due particelle diventano paralleli: $\mathbf{p}_i \parallel \mathbf{p}_j$
Può dare origine a singolarità quando il campo a massa nulla si accoppia con altri campi a massa nulla o con se stesso

Esempio: $(\phi^3)_6$



- esistono divergenze collineari:

- Spazio delle fasi

$$\frac{d^d k}{2k_0} \sim k_0^{d-3} dk_0 \sin^{d-3} \theta d\theta d\phi \sim \theta^2 d\theta^2$$

- Elemento di matrice

$$\lambda^2 \frac{1}{(p+k)^4} \sim \frac{1}{p_0^2 k_0^2 (1 - \cos \theta)^2} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

$\Rightarrow$ Spettro collineare $d\theta^2/\theta^2$

- ...ma non divergenze soffici

$$\frac{1}{k_0^2} \cdot k_0^{d-3} dk_0 \sim k_0 dk_0$$

Teoria delle perturbazioni t-ordinata

L'equazione per l'operatore di evoluzione in rappresentazione di interazione è

$$i \dot{u}_I(t) = H_I(t) u_I \quad (H = H_0 + V \quad H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t})$$

Soluzione covariante:

$$u_I(t, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^t H_I(t') dt' + (-i)^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$$

Introducendo il prodotto T si può scrivere

$$S \equiv u_I(-\infty, \infty) = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t_1) dt_1 \right\}$$

che porta alla usuale formulazione alla Feynman

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int T [\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)] d^4 x_1 \dots d^4 x_n$$

Espansione t-ordinata (“vecchia” teoria delle perturbazioni):

La matrice S può essere scritta anche come

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi \delta(E_f - E_i) T_{fi}$$

$$T_{fi} = V_{fi} + \left(V \left(\frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} \right) V \right)_{fi} + \dots$$

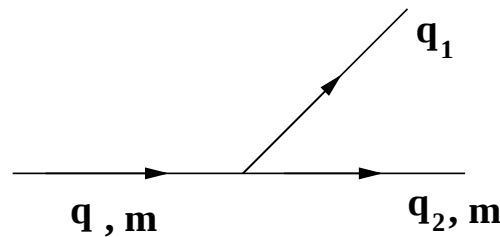
$$= V_{fi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int dc_1 \dots dc_n \frac{V_{fc_1} \dots V_{c_n i}}{(E_f - E_{c_1} + i\epsilon) \dots (E_{c_n} - E_i + i\epsilon)}$$



Propagatori in energia

Divergenze infrarosse e degenerazione

Nell'approccio della “vecchia” teoria delle perturbazioni le divergenze infrarosse originano dall'annullarsi di propagatori in energia e quindi da configurazioni in cui il **trasferimento di energia** al vertice è piccolo



Definiamo il trasferimento di energia on shell al vertice:

$$\nu \equiv \omega(q_1) + \omega(q_2) - \omega(q_1 + q_2)$$

- **Limite soffice**
 ν diventa piccolo se: $q_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \sim \omega_2$
- **Limite collineare**
 Nel caso $m = 0$ a causa di una cancellazione ν diventa piccolo anche se $q_1 \parallel q_2$

$$\begin{aligned} \nu &= \omega(q_1) + \omega(q_2) - \omega(q_1 + q_2) \\ &= \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2 - \omega^2(q_1 + q_2)}{\omega_1 + \omega_2 + \omega(q_1 + q_2)} \\ &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 - (m^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2)}{\omega_1 + \omega_2 + \omega(q_1 + q_2)} \\ &= \frac{2(\omega_1\omega_2 - q_1q_2)}{\omega_1 + \omega_2 + \omega(q_1 + q_2)} \sim \frac{q_1q_2}{\omega_1 + \omega_2} \end{aligned}$$

Teoremi di cancellazione

Teorema di Block-Nordsieck:

In QED le divergenze soffici si cancellano nelle probabilità di transizione per processi inclusivi sui fotoni soffici



La somma è quindi solo sugli stati degeneri finali

In QCD ciò non è sufficiente e il teorema di Block-Nordsieck è in generale violato a causa della natura non abeliana della teoria

È valido nei casi con al massimo un partone nello stato iniziale come e^+e^- , DIS, e, a livello delle singolarità dominanti, nel Drell-Yan

Teorema di Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN):

In una teoria con particelle di massa nulla le divergenze IR si cancellano nelle probabilità di transizione se si somma su stati degeneri iniziali e finali

Teorema KLN

Consideriamo l'espansione della matrice secondo la vecchia teoria delle perturbazioni

$$T_{fi} = V_{fi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int dc_1 \dots dc_n \frac{V_{fc_1} \dots V_{c_n i}}{(E_f - E_{c_1} + i\epsilon) \dots (E_{c_n} - E_i + i\epsilon)}$$

In questo approccio le divergenze infrarosse originano dall'annullarsi dei propagatori in energia

Tuttavia la singolarità è regolata dalla prescrizione $+i\epsilon$

⇒ Solo negli estremi si può avere divergenza (es: $E_{c_1} = E_f$)

Gli stati intermedi pericolosi sono quindi solo quelli degeneri con i e f

Indichiamo con $P_i(P_f)$ il proiettore sugli stati degeneri con $i(f)$ e definiamo $\mathbb{P}_{if} = 1 - P_i - P_f$

Il contributo degli stati degeneri può essere trascurato se non porta a divergenze ⇒ possiamo scrivere

$$T_{fi} = \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \left[\left(V \frac{P_f}{E_f - H_0 + i\epsilon} \right)^a V \left(\frac{\mathbb{P}_{if}}{E_f - H_0 + i\epsilon} V \right)^b \left(\frac{P_i}{E_i - H_0 + i\epsilon} V \right)^c \right]_{fi}$$

oppure

$$T_{fi} = \Omega_{-f}^{\dagger} T_H \Omega_{+i}$$

dove

$$\Omega_{\pm a} = \sum_{c=0}^{\infty} \left(\frac{P_a}{E_a - H_0 \pm i\epsilon} V \right)^c \quad a = i, f$$

$$T_H = \sum_{c=0}^{\infty} V \left(\frac{\mathbb{P}_{if}}{E_i - H_0 + i\epsilon} V \right)^c \quad \text{operatore IR finito}$$

Osserviamo ora che se non fosse per i proiettori P_i, P_f gli operatori Ω_{-f} e Ω_{+i} sarebbero unitari in quanto operatori di evoluzione

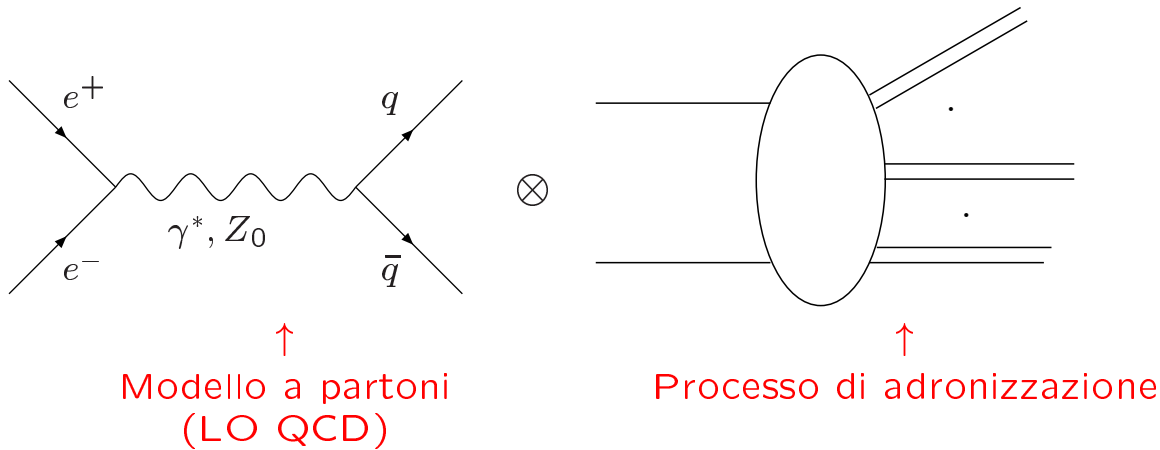
- Ω_{+i} evolve da $t = -\infty$ a $t = 0$
- $\Omega_{-f}^\dagger$ evolve da $t = 0$ a $t = \infty$

$\Rightarrow$ Allora sono unitari se ristretti al sottospazio degli stati degeneri con i e f

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in D(f)} \sum_{\alpha \in D(i)} |T_{\beta\alpha}|^2 &= \sum_{\beta \in D(f)} \sum_{\alpha \in D(i)} (\Omega_{+i}^\dagger)_{\alpha a} (T_H^\dagger)_{ab} (\Omega_{-f})_{b\beta} \\ &\quad \cdot (\Omega_{-f}^\dagger)_{\beta c} (T_H)_{cd} (\Omega_{+i})_{d\alpha} = |(T_H)_{fi}|^2 \end{aligned}$$

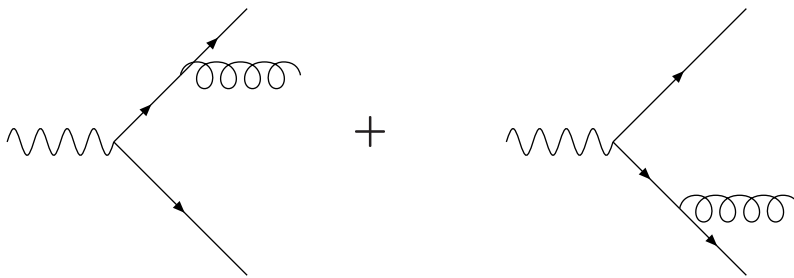
In questo modo la cancellazione è una conseguenza diretta della proprietà di unitarietà della teoria

Annichilazione $e^+e^- \rightarrow$ adroni

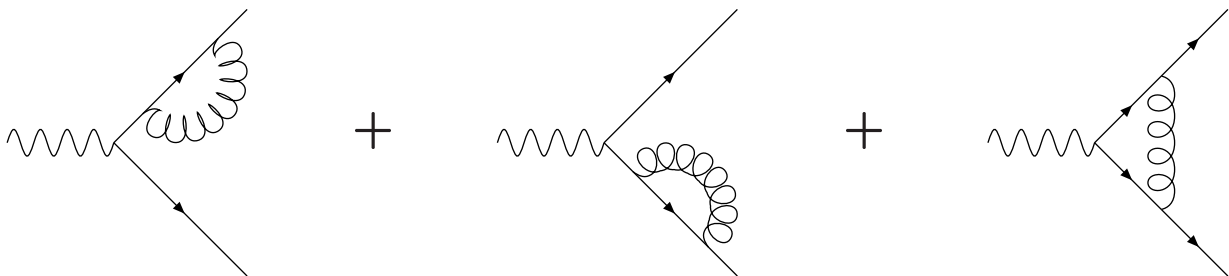


Consideriamo le correzioni $\mathcal{O}(\alpha_S)$ alla sezione d'urto partonica:

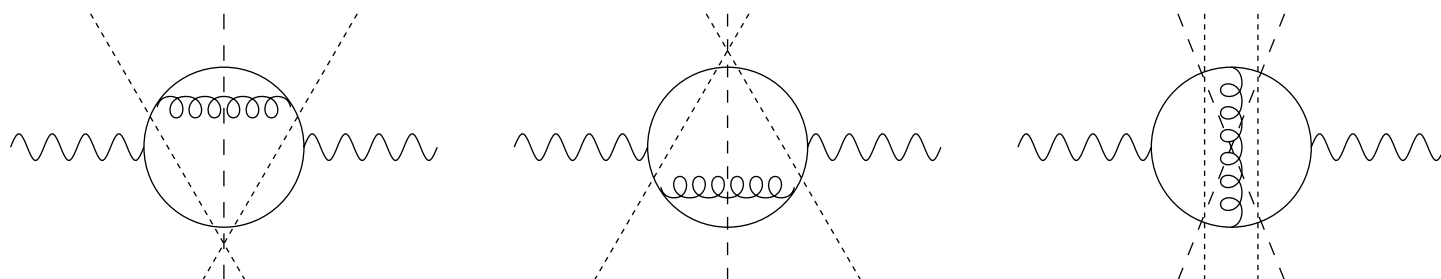
- Reali



- Virtuali



Prendendo il modulo quadro **reale** e **virtuale** hanno simile struttura ma cinematica diversa



----- **reale**

Linee tagliate $\Rightarrow$ on shell

----- **virtuale**

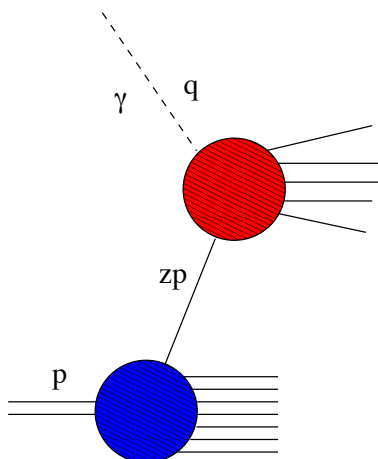
- Reale e virtuale sono separatamente divergenti
(calcolo esplicito $\rightarrow$ Lorenzo Magnea)
- Le differenze cinematiche influenzano solo le parti finite
- Il segno è opposto per unitarietà

$\Rightarrow$ La divergenza nel reale e virtuale si cancella e si ottiene un contributo totale finito

Tutto ciò è in accordo con il teorema KLN: lo stato finale è completamente inclusivo e quindi si somma sugli stati degeneri finali

Processi duri con adroni nello stato iniziale

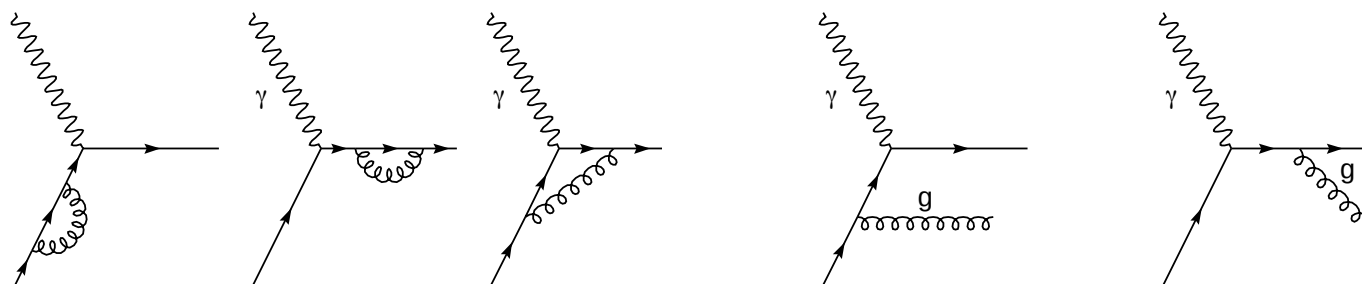
Consideriamo ad esempio il DIS:



← sezione d'urto partonica

← $f(z)$ densità partonica

Correzioni alla sezione d'urto partonica:



↑
virtuali

↑
reali

Nel calcolo compaiono divergenze infrarosse

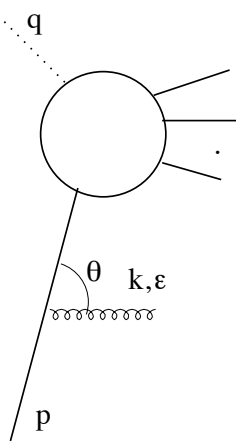
Stato finale completamente inclusivo

⇒ KLN: cancellazione delle divergenze di stato finale

Tuttavia nello stato iniziale c'è un solo partone

⇒ rimane una divergenza di stato iniziale non cancellata

NB: Succede ogni volta che si hanno adroni nello stato iniziale



$$\sim \alpha_S(Q^2) \int_0^1 \frac{d\theta^2}{\theta^2} \sim \int_0^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2}$$

In realtà la divergenza collineare è regolarizzata da un cut off fisico Q_0 rappresentato dalla tipica scala adronica

$$\Rightarrow \int_0^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} \rightarrow \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} \rightarrow \log Q^2/Q_0^2$$

La divergenza collineare non cancellata implica l'esistenza di effetti di lunga distanza

Da notare che l'emissione multipla produce contributi del tipo $\alpha_S^n \left(\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} \right)^n$ che vanno risommati a tutti gli ordini per avere una predizione perturbativa accettabile

Infatti essendo $Q_0 \sim \Lambda_{QCD} \Rightarrow \alpha_S \log Q^2/Q_0^2$ può essere ~ 1

Sia la sensitività all'infrarosso che il calcolo degli effetti a tutti gli ordini vengono risolti dal

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE COLLINEARE

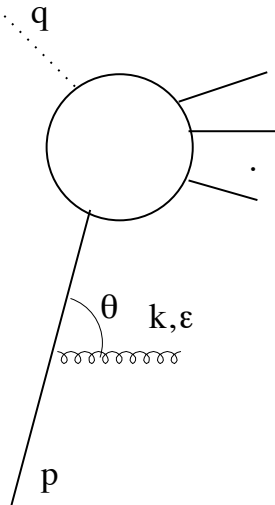
In breve: le divergenze collineari possono essere riassorbite nelle densità partoniche nude $f_0(x) \rightarrow f(x, Q^2)$ (analogia con la rinormalizzazione)

Le densità partoniche fisiche diventano perciò dipendenti dalla scala

Tutto questo è possibile se questa operazione è indipendente dal processo duro considerato

Fattorizzazione collineare

Usiamo: power counting + gauge fisica



Emissione collineare di un gluone

- Spazio delle fasi

$$\frac{d^3k}{2k_0} \sim k_0 dk_0 d\cos\theta d\phi \sim d\theta^2$$

- Elemento di matrice

- Propagatore:

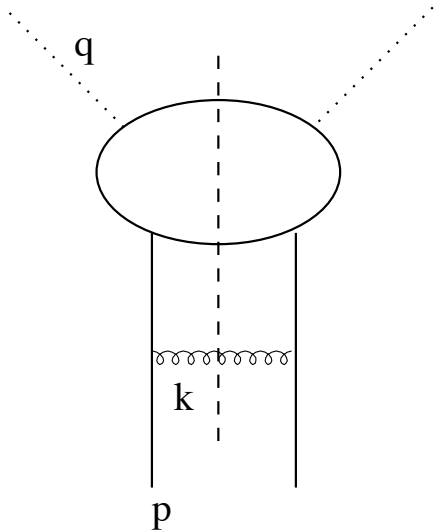
$$\frac{1}{(p-k)^2} \sim \frac{1}{p_0^2 k_0^2 (1-\cos\theta)} \sim \frac{1}{\theta^2}$$

- Vertice:

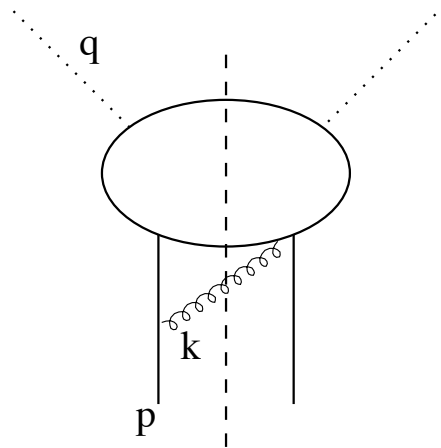
$$\not{p}\not{\epsilon}(k)(\not{p}-\not{k}) \sim \theta \quad \text{In gauge fisica}$$

(infatti nel limite collineare $k \propto p + \mathcal{O}(\theta)$
 e in gauge fisica $\epsilon(p) \cdot p = 0$)

Prendendo il modulo quadro:



$$d\theta^2 \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{\theta^2} \theta \theta \sim \frac{d\theta^2}{\theta^2}$$



$$\frac{d\theta^2}{\theta^2} \theta \quad \text{non abbastanza singolare}$$

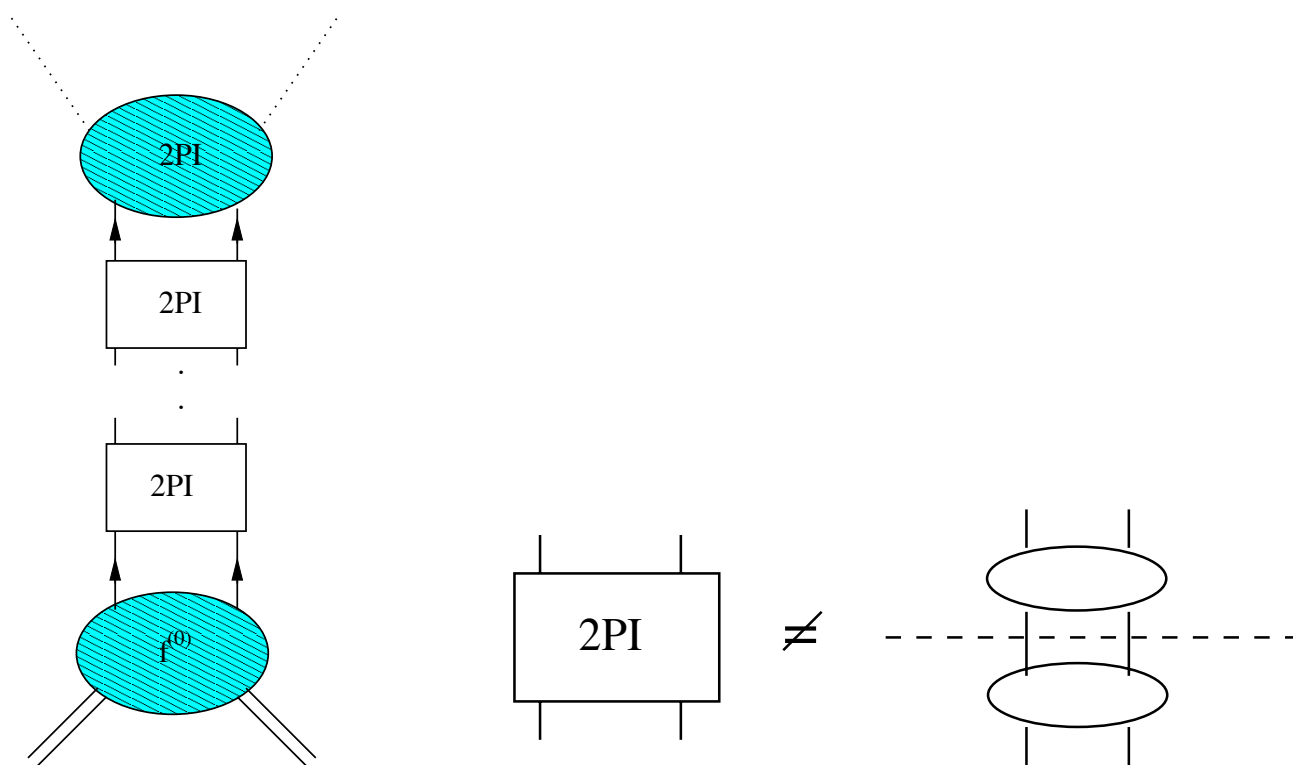
⇒ Solo i diagrammi diretti possono dare singolarità in gauge fisica, mentre le interferenze possono essere trascurate

NB: Succede anche in $(\phi^3)_6$

NB: In gauge covarianti invece anche le interferenze contribuiscono ma il risultato finale è lo stesso

Strategia:

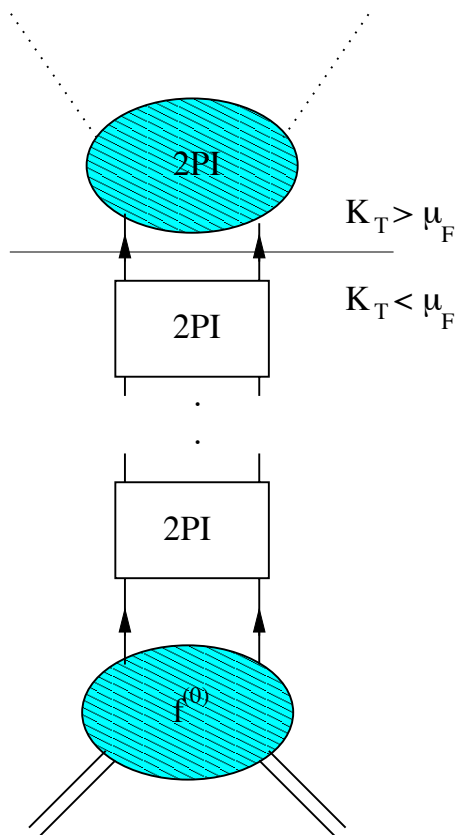
- Decomporre i diagrammi in blocchi 2PI (che non possono essere disgiunti tagliando solo due linee)



Si può dimostrare che i blocchi 2PI sono privi di singolarità collineari in gauge fisica

⇒ Le singolarità originano esclusivamente dalle linee che connettono tra loro i vari blocchi

- Introdurre una scala arbitraria di separazione μ_F



← Dipendente dal processo ma finita

← Universale ma divergente

$$\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} = \int_{Q_0^2}^{\mu_F^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} + \int_{\mu_F^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2}$$

- Riassorbire la parte divergente nella definizione di $f(x)$

$$f^{(0)} E(\mu_F^2/Q_0^2) \hat{\sigma}(Q^2/\mu_F^2) \equiv f(\mu_F^2) \hat{\sigma}(Q^2/\mu_F^2)$$

Più precisamente:

$$\sigma(p, Q) = \sum_a \int_0^1 dz f_a(z, \mu_F^2) \hat{\sigma}_a(zp, \alpha_S(Q^2); \mu_F^2)$$



Densità partonica dipendente dalla scala: non calcolabile perturbativamente ma universale



Sezione d'urto partonica opportunamente sottratta, finita e calcolabile perturbativamente

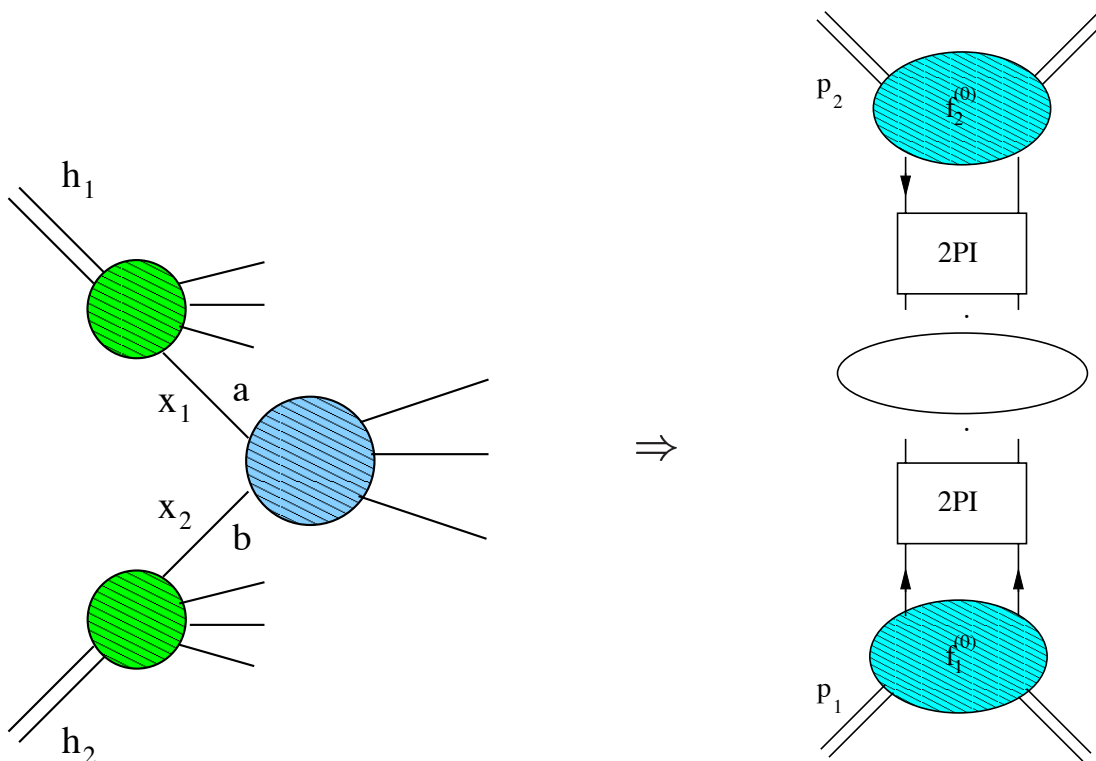
Collisioni adroniche: Drell-Yan

DY: $h_1(p_1) + h_2(p_2) \rightarrow V(Q^2) + X$ ($V = \gamma^*, Z^*, H \dots$)

Processo duro caratterizzato dalla grossa massa invariante Q^2 di V

NB: La sezione d'urto **totale** è invece "soffice": niente scala dura $\Rightarrow$ non è calcolabile in QCD perturbativa

Per la fattorizzazione valgono gli stessi argomenti che per il DIS



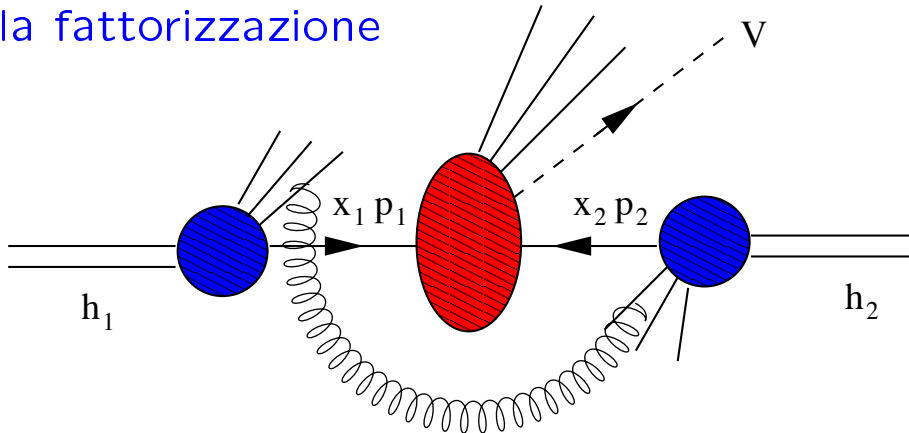
La formula di fattorizzazione è:

$$\sigma(p_1, p_2; Q^2) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_{h_1,a}(x_1, \mu_F^2) f_{h_2,b}(x_2, \mu_F^2) \times \hat{\sigma}_{ab}(x_1 p_1, x_2 p_2, \alpha_S(Q^2), \mu_F^2)$$

e le densità partoniche sono le stesse che si misurano nel DIS

Problema: La dimostrazione che i gluoni soffici non rovinano la fattorizzazione è molto complicata

I gluoni soffici (grande lunghezza d'onda) possono trasportare l'informazione di colore da un adrone all'altro e quindi rovinare la fattorizzazione



Calcoli espliciti hanno mostrato che la presenza di due adroni nello stato iniziale rompe la fattorizzazione ma gli effetti sono **soppressi a potenza** nel limite di alta energia

Interpretazione intuitiva:

Potenziale classico di una carica e che si muove con velocità v lungo l'asse z :

$$A^\mu = \frac{e}{[(z - vt)^2 + (1 - v^2)(x^2 + y^2)]^{1/2}} (1, 0, 0, v)$$

Per $v \rightarrow 1$

$$A^\mu \sim \frac{e}{|z - vt|} (1, 0, 0, 1)$$

La particella genera un potenziale non localizzato che si estende lungo tutta la direzione z

Però per $z \neq vt$

$$A^\mu \sim \frac{\partial}{\partial x_\mu} e \log |z - vt| \quad \text{puro gauge !}$$

$\Rightarrow$

Il campo $F_{\mu\nu}$ non è a lungo range ma confinato attorno a $z \sim vt$

Conseguenze del teorema di fattorizzazione:

$$\sigma(Q^2) = f(\mu_F^2) \otimes \hat{\sigma}(\alpha_S(Q^2), \mu_F^2)$$

a) Introduzione di una scala arbitraria μ_F

La sezione d'urto fisica non può dipendere da $\mu_F \Rightarrow$ la dipendenza da μ_F si deve cancellare tra f e $\hat{\sigma}$

La scelta di μ_F è arbitraria ma se μ_F è molto diversa dalla scala dura $Q \Rightarrow$ compaiono $\log Q^2/\mu_F^2$ che rovinano l'espansione perturbativa

$\Rightarrow$ di solito si sceglie $\mu_F \sim Q$

b) Le densità partoniche diventano dipendenti dalla scala

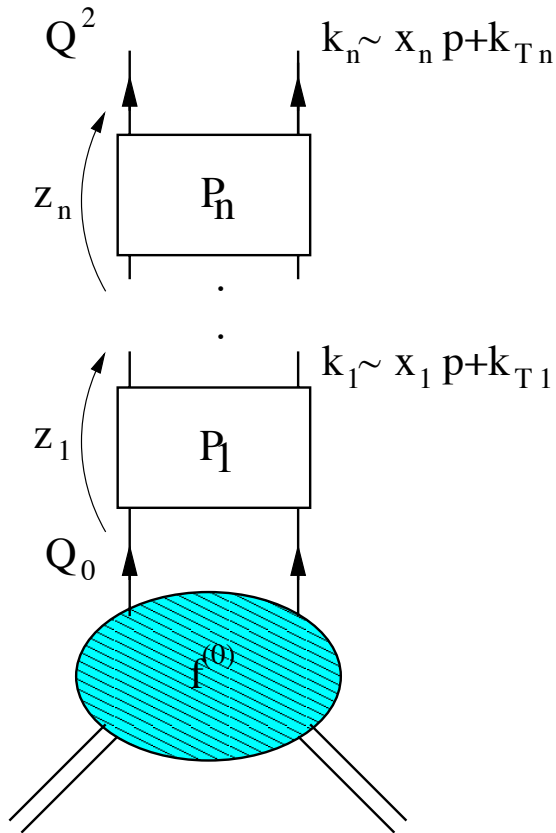
La dipendenza dalla scala delle densità partoniche è associata alla risommazione dei logaritmi collineari

c) La dipendenza dalla scala è calcolabile perturbativamente

$\Rightarrow$ Equazioni di Altarelli-Parisi

Equazioni di Altarelli-Parisi

Le densità partoniche $f_i(x, Q^2)$ non sono calcolabili in QCD perturbativa ma la loro dipendenza da Q^2 lo è



$$f(\mu_F^2) = f_0 \otimes E(\mu_F^2/Q_0^2)$$

La regione importante è:

$$Q^2 > k_{Tn}^2 > \dots k_{T1}^2 > Q_0^2$$

Infatti è così che si genera la massima potenza di $\log Q^2/Q_0^2$

⇒ Struttura iterativa

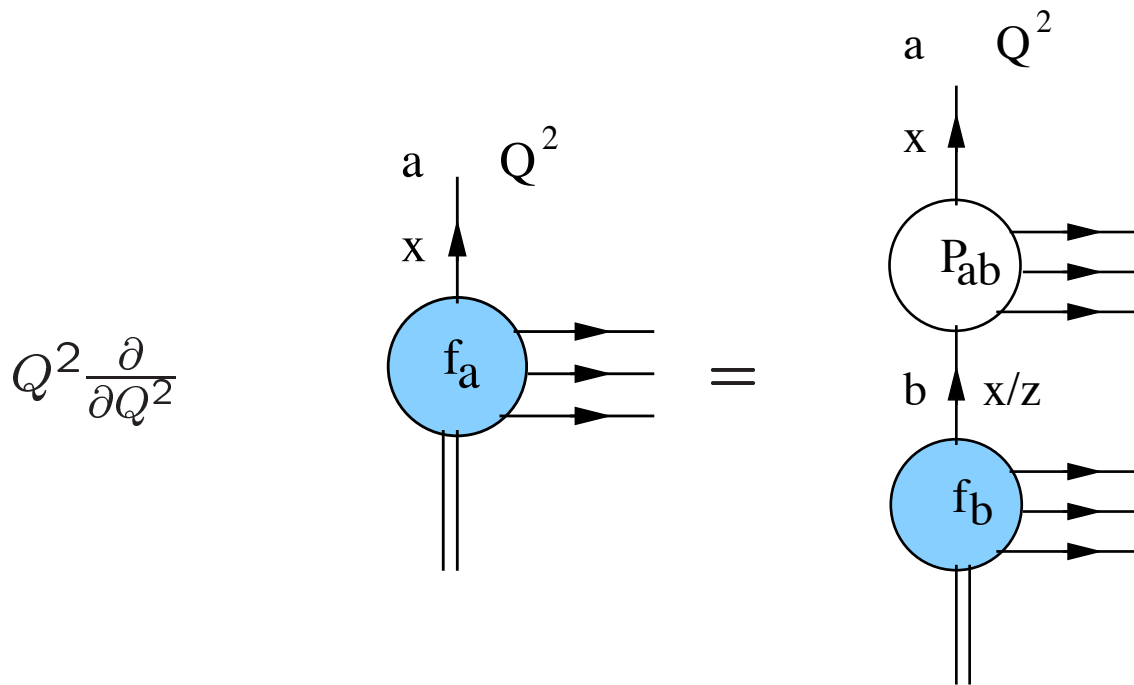
$$f(x, Q^2) = f_0(x) + \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_{Tn}^2}{k_{Tn}^2} \int_x^1 \frac{dz_n}{z_n} P_n(\alpha_S(k_{Tn}^2), z_n) f(x/z_n, k_{Tn}^2)$$

Derivando rispetto a Q^2

$$Q^2 \frac{\partial f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \int_x^1 \frac{dz}{z} P(\alpha_S(Q^2), z) f(x/z, Q^2)$$

Equazione differenziale del primo ordine: può essere risolta se è nota f ad una scala di riferimento Q_0^2 (tipicamente misurata sperimentalmente)

Interpretazione probabilistica



- $P_{ab}(\alpha_S(Q^2), z)$ probabilità di trovare il partone a nel partone b alla scala Q^2

- $P_{ab}(\alpha_S, z) = \frac{\alpha_S}{2\pi} P_{ab}^{(0)}(z) + \left(\frac{\alpha_S}{2\pi}\right)^2 P_{ab}^{(1)}(z) + \dots$

kernel di Altarelli-Parisi: calcolabile perturbativamente in serie di α_S

- $P_{ab}^{(0)}$, $P_{ab}^{(1)}$ note
 - Risolvere l'equazione di AP utilizzando $P_{ab}^{(0)}$ equivale a risommare i **logaritmi leading (LL)**: $\alpha_S^n \log^n Q^2/Q_0^2$
 - Includere anche $P_{ab}^{(1)}$ equivale a risommare anche quelli **next-to-leading (NLL)**: $\alpha_S^n \log^{n-1} Q^2/Q_0^2$
- Convoluzione $\leftrightarrow$ conservazione dell'impulso longitudinale

NB: Prendendo la trasformata di Mellin i prodotti di convoluzione diventano prodotti ordinari:

$$(f \otimes g)(x) \equiv \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z) g(x/z)$$

$$(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$$

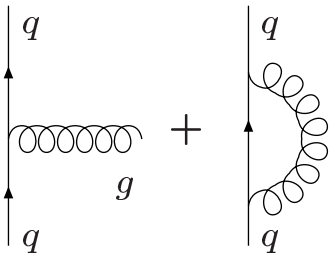
Confrontando con quanto avevamo ottenuto con l'OPE si conclude che:

$$\gamma_{ab}(N) \iff \int_0^1 x^{N-1} P_{ab}(z)$$

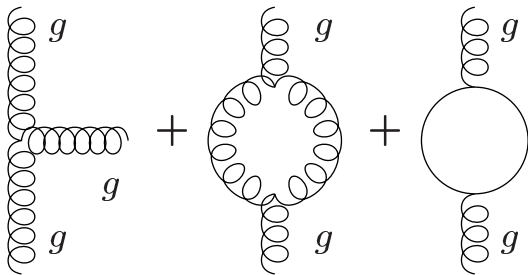
- $\gamma_{ab}(N)$ dimensioni anomale degli operatori di leading twist
- $P_{ab}(z)$ probabilità di *splitting* $b \rightarrow a$

In questo modo l'equazione di Altarelli-Parisi ha un'interpretazione più fisica rispetto a quella che le diamo a partire dall'OPE dove essa è semplicemente una conseguenza del gruppo di rinormalizzazione

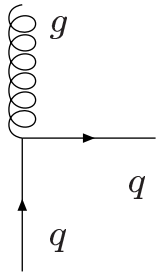
Funzioni di splitting di AP



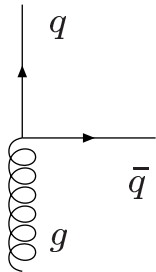
$$P_{qq}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]$$



$$P_{gg}(z) = 2C_A \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_R n_F \right) \delta(1-z)$$



$$P_{gq}(z) = C_F \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right]$$



$$P_{qg}(z) = T_R [z^2 + (1-z)^2]$$

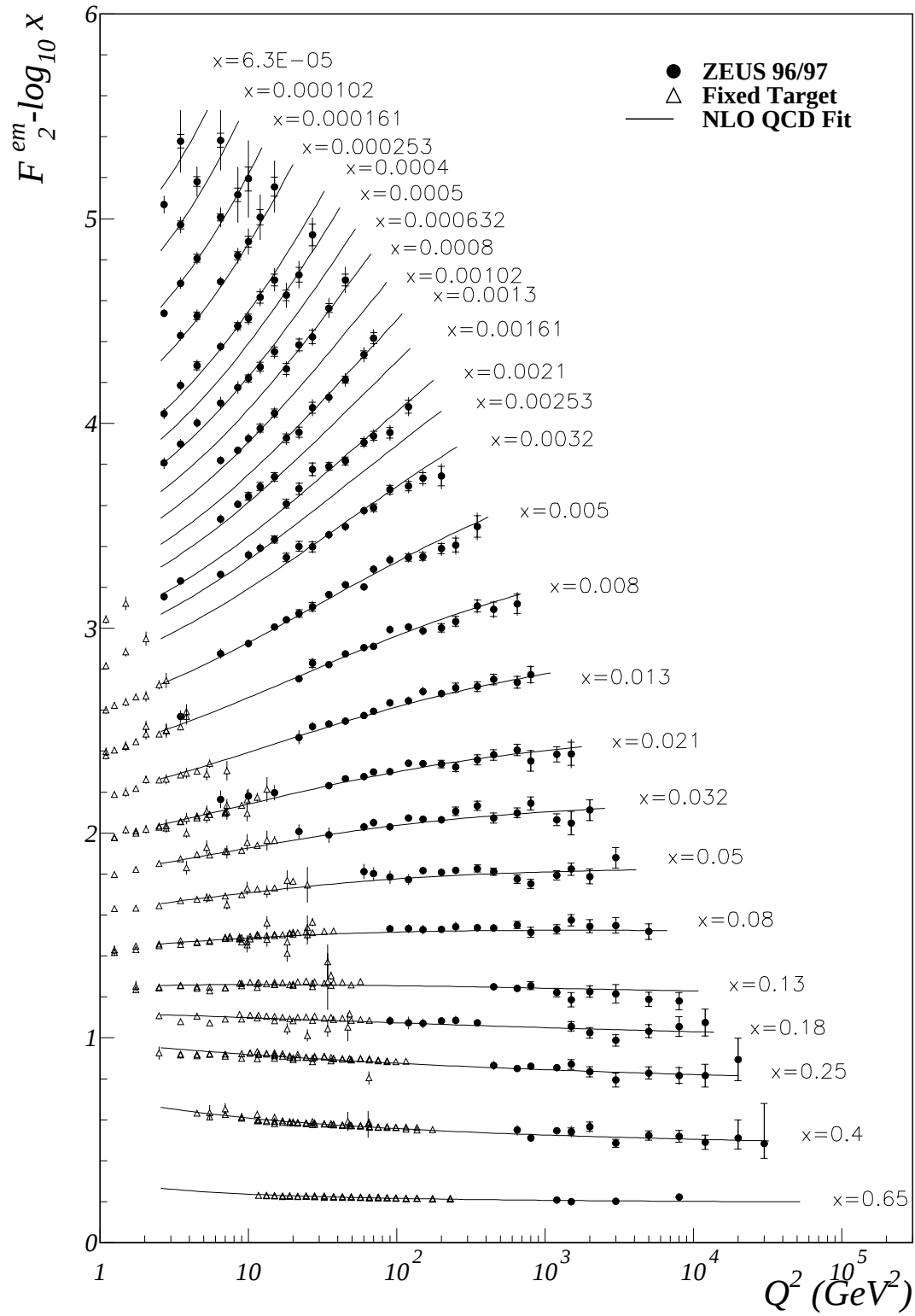
Proprietà:

$$P_{qq} \rightarrow \frac{2C_F}{(1-z)_+} \quad P_{gg} \rightarrow \frac{2C_A}{(1-z)_+} \quad \text{per } z \rightarrow 1$$

$$P_{gg} \rightarrow \frac{2C_A}{z} \quad P_{gq} \rightarrow \frac{2C_F}{z} \quad \text{per } z \rightarrow 0$$

$$P_{qq}(1-z) = P_{gq}(z) \quad \text{simmetria} \quad z \rightarrow 1-z$$

ZEUS



Le violazioni di scaling sono:

- **Positive** a piccolo x
- **Leggermente negative** a grande x

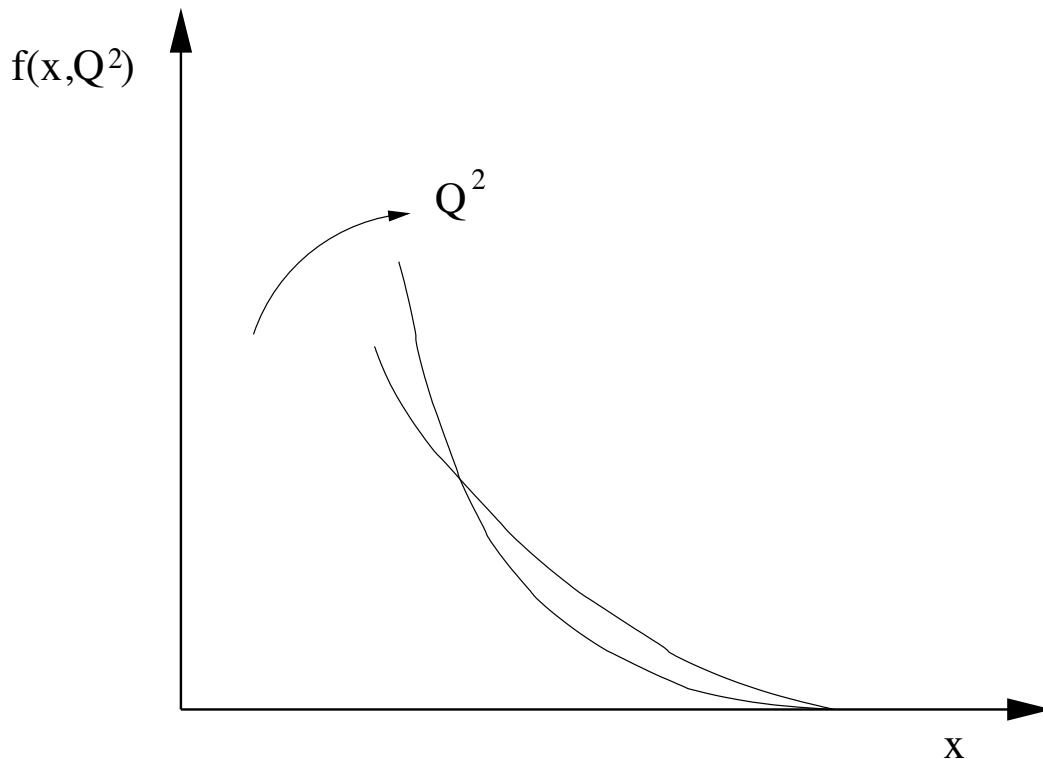
Infatti

$$\gamma_{ab}(N) = \int_0^1 P_{ab}(x) x^{N-1}$$

⇒ la regione di piccoli x corrisponde a $N \sim 1$ mentre $x \rightarrow 1$ seleziona grandi N

$$\gamma_{gg} \sim \frac{2C_A}{N-1} \quad \text{per } N \sim 1$$

$$\gamma_{aa} \sim -2C_a \log N \quad \text{a grandi } N$$



All'aumentare di Q^2 l'effetto principale è lo spostamento dei partoni da x più grandi a x più piccoli

Soluzione approssimata dell'equazione di AP

Consideriamo per semplicità il caso di non singoletto $f = q_i - q_j$

Nello spazio dei momenti l'equazione di AP diventa:

$$Q^2 \frac{\partial f_N}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \gamma_{qq}(N) f_N$$

Usando per α_S la sua espressione a un loop si ottiene

$$f_N(Q^2) = \left(\frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)} \right)^{\frac{\gamma_{qq}}{2\pi\beta_0}} f_N(Q_0^2)$$

Vediamo ora la forma della soluzione nei due limiti

Grandi x

A grandi x l'evoluzione è dominata da

$$P_{aa} \sim 2C_a \left(\frac{1}{1-x} \right)_+$$

per calcolarne i momenti possiamo usare

$$x^{N-1} - 1 \sim -\theta(1-x-1/N) \quad (3)$$

Infatti la funzione x^{N-1} per grandi N è nulla quasi ovunque tranne che per $x > 1 - 1/N$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \frac{x^{N-1} - 1}{1-x} \sim - \int_0^{1-1/N} \frac{dx}{1-x} = -\log N$$

E quindi

$$\gamma_{aa}(N) \sim -2C_a \log N$$

Supponiamo ora che alla scala Q_0^2 la distribuzione abbia la forma

$$f(x, Q_0^2) = (1 - x)^{a(Q_0^2)}$$

usando l'approssimazione (3) si ottiene

$$f_N(Q_0^2) \sim \frac{1}{N^{1+a(Q_0^2)}}$$

e quindi la soluzione dell'equazione diventa

$$\begin{aligned} f_N(Q^2) &\sim \left(\frac{1}{N}\right)^{1+a(Q_0^2)} \left(\frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)}\right)^{-\frac{C_A}{\pi\beta_0} \log N} \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^{a(Q_0^2)+1+\frac{C_A}{\pi\beta_0} \log \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)}} \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x, Q^2) \sim (1 - x)^{a(Q_0^2)+\frac{C_A}{\pi\beta_0} \log \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)}}$$

⇒ a grandi x la distribuzione tende a zero più rapidamente all'aumentare di Q^2

Piccoli x

In questa regione l'evoluzione è dominata dalla dimensione anomala del gluone

$$P_{gg} = 2C_A \left(\frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right) + \beta_0 \delta(1-x) \sim \frac{2C_A}{x}$$

La soluzione dell'equazione per i momenti della densità del gluone è quindi

$$g_N(Q^2) = g_N(Q_0^2) \left(\frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)} \right)^{\frac{C_A}{\pi\beta_0(N-1)}}$$

Prendendo la trasformata di Mellin inversa

$$\begin{aligned} x g(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int dN x^{-(N-1)} g_N \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int dN g_N(Q_0^2) \exp \left\{ -(N-1) \log x + \frac{C_A}{\pi\beta_0(N-1)} \log \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)} \right\} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int dN g_N(Q_0^2) \exp \{ f(N-1) \} \end{aligned}$$

dove

$$f(\omega) = A\omega + \frac{B}{\omega} \quad A = \log \frac{1}{x} \quad B = \frac{C_A}{\pi\beta_0} \log \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)}$$

Quando A e B sono grandi ($x \rightarrow 0$ $Q^2 \rightarrow \infty$) l'integrale può essere stimato col metodo del punto sella:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{B/A}$$

e quindi

$$f(N-1) = 2\sqrt{AB} + \mathcal{O}(N - N_0)^2 \quad N_0 = 1 + \sqrt{B/A}$$

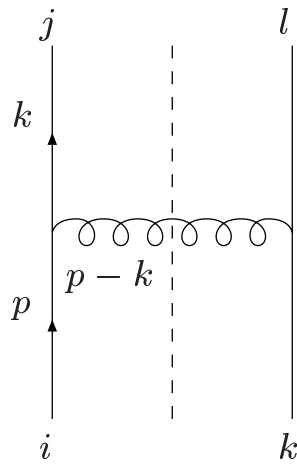
L'andamento approssimato della densità del gluone è allora

$$x g(x) \sim \exp \sqrt{\frac{4C_A}{\pi\beta_0} \log \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{\alpha_S(Q^2)} \log \frac{1}{x}}$$

- Forte crescita del gluone a piccolo x

Più rapida di qualsiasi potenza di $\log \frac{1}{x}$ ma più lenta di qualsiasi potenza di $1/x$

- La velocità di crescita è tanto maggiore quanto più grande è Q^2



$$d_{\mu\nu}(p-k) = -g_{\mu\nu} + \frac{(p-k)_\mu n_\nu + (p-k)_\nu n_\mu}{(p-k) \cdot n}$$

$$n^\mu d_{\mu\nu}(p-k) = 0 \quad (p-k)^\mu d_{\mu\nu}(p-k) = 0$$

parametrizzazione di Sudakov in termini di p e n

$$k^\mu = zp^\mu + k_T^\mu + \frac{k^2 - k_T^2}{2zp \cdot n} n^\mu$$

$$(p-k)^\mu = (1-z)p^\mu - k_T^\mu - \frac{k_T^2}{2(1-z)p \cdot n} n^\mu$$

Relazioni utili:

$$i) \quad (p-k)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 2p \cdot k = \frac{k^2 - k_T^2}{z} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{k_T^2}{1-z}$$

$$ii) \quad p_\mu d^{\mu\nu} = k_\mu d^{\mu\nu} = zp_\mu d^{\mu\nu} + k_{T\mu} d^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad p_\mu d^{\mu\nu} = \frac{k_{T\mu}}{1-z} d^{\mu\nu}$$

$$iii) \quad p_\mu p_\nu d^{\mu\nu} = \frac{k_{T\mu}}{1-z} d^{\mu\nu} \frac{k_{T\nu}}{1-z} = -\frac{k_T^2}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow \quad p_\mu p_\nu d^{\mu\nu} = -\frac{k^2}{1-z}$$